UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MOD 190 — Numeriske Beregninger
Eksamensdag:	2 juni 2003
Tid for eksamen:	9.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 7 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 10 delspørsmål vektlegges likt.

Oppgave 1 Numerisk integrasjon

1a

Gitt kvadraturregelen

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k),$$

for en vilkårlig funksjon f definert på intervallet $[a,b]$, finn en tilsvarende kvadraturregel

$$\int_c^d g(y)\,dy \approx \sum_{k=1}^n v_k g(y_k),$$

for en funksjon g definert på et vilkårlig intervall $[c,d]$, ved å finne vektene v_k og punktene y_k uttrykt ved x_k og w_k.

Svar: Skift variabler ved å sette

$$y = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a).$$

Da har vi

$$dy = \frac{d-c}{b-a}\,dx$$

og dermed

$$\int_c^d g(y)\,dy \quad = \quad \int_a^b g\left(c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)\right)\frac{d-c}{b-a}\,dx$$

(Fortsettes på side 2.)

$$\approx \frac{d-c}{b-a}\sum_{k=1}^{n} w_k g\left(c + \frac{d-c}{b-a}(x_k - a)\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} v_k g(y_k),$$

hvor

$$v_k = \frac{d-c}{b-a} w_k, \qquad y_k = c + \frac{d-c}{b-a}(x_k - a).$$

1b

Gitt at Gausskvadraturregelen

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx f(\frac{-1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}})$$

er eksakt for alle polynomer av grad ≤ 3. Finn en to punkts formel

$$\int_0^1 f(x)dx \approx G(f) = v_1 f(y_1) + v_2 f(y_2)$$

som er eksakt for alle polynomer av grad ≤ 3. Utled deretter en 4-punkts Gausskvadraturregel for

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy$$

som er eksakt for alle polynomer på formen

$$p(x,y) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij} x^i y^j.$$

Hint: Forklar hvorfor

$$\int_0^1 \int_0^1 x^i y^j\, dx\, dy = G(x^i)G(y^j)$$

for $0 \leq i, j \leq 3$.

Svar: Bruk resultat av spørsmål (1a), med $a = -1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$. Vi får

$$G(f) = \frac{1}{2} f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right).$$

Siden den gitte regelen er eksakt for polynomer av grad ≤ 3, er også den nye regelen G eksakt for de samme polynomer (følger fra svaret til spørsmål (1a)).

Det følger at

$$\int_0^1 \int_0^1 x^i y^j\, dx\, dy = \int_0^1 x^i\, dx \int_0^1 y^j\, dy = G(x^i)G(y^j),$$

(Fortsettes på side 3.)

for $0 \le i, j \le 3$. Det betyr at

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 p(x,y)\,dx\,dy \\
&\quad = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}(v_1 y_1^i + v_2 y_2^i)(v_1 y_1^j + v_2 y_2^j) \\
&\quad = v_1^2 \sum_{i,j} a_{ij} y_1^i y_1^j + v_1 v_2 \sum_{i,j} a_{ij} y_1^i y_2^j + v_1 v_2 \sum_{i,j} a_{ij} y_2^i y_1^j + v_2^2 \sum_{i,j} a_{ij} y_2^i y_2^j \\
&\quad = v_1^2 p(y_1, y_1) + v_1 v_2 p(y_1, y_2) + v_1 v_2 p(y_2, y_1) + v_2^2 p(y_2, y_2).
\end{aligned}$$

Vi har dermed utledet en 4-punkts regel

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy \;\approx\; & \frac{1}{4} f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right) \\
& + \frac{1}{4} f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}\right) + \frac{1}{4} f\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}\right)
\end{aligned}$$

som er eksakt for polynomer av grad ≤ 3 i hver variabel.

Oppgave 2 Ligningsystem

Vi skal løse det 2-punkt randverdi-problemet

$$-y''(x) = f(x) \tag{1}$$

for x i intervallet $[0,1]$, med randbetingelsene $y(0) = 1$ og $y(1) = 3$, og hvor $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ er en gitt funksjon. For et gitt heltall n, la $h = 1/n$ og $x_k = kh$, for $k = 0, 1, \ldots, n$.

2a

Ved å bruke Taylor-rekker, vis at

$$\frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2} = y''(x_k) + O(h^2). \tag{2}$$

Svar: Fra de to Taylorrekkene

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) + \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + O(h^4),$$

og

$$y(x_{k-1}) = y(x_k) - hy'(x_k) + \frac{h^2}{2} y''(x_k) - \frac{h^3}{6} y'''(x_k) + O(h^4).$$

ser vi at

$$y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1}) = h^2 y''(x_k) + O(h^4),$$

og resultatet følger fra å dividere med h^2.

(Fortsettes på side 4.)

2b

Anta at vi setter $u_0 = 1$ og $u_n = 3$ og vi lar $u_1, \ldots, u_{n-1}$ være løsningene til ligningene

$$-u_{k-1} + 2u_k - u_{k+1} = h^2 f(x_k), \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{3}$$

Hvorfor er det rimelig å forvente at $u_k \approx y(x_k)$?

Uttrykk ligningene (3) i vektor or matrise form. Hvilken egenskap har matrisen som bør utnyttes når man løser ligningsystemet?

Svar: Når h er liten, vil approksimasjonen

$$\frac{y(x_{k-1}) - 2y(x_k) + y(x_{k+1})}{h^2} \approx y''(x_k)$$

være god, p.g.a. spørsmål (2a). Da er det rimelig å forvente at den eksakte løsningen til disse ligningenene vil være en god approksimasjon til den ekte løsningen, d.v.s. at $u_k \approx y(x_k)$.

I vektor- og matriseform:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) + u_0 \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) + u_n \end{pmatrix}.$$

Matrisen er tridiagonal. Det betyr at ligningsystemet kan løses i $O(n)$ operasjoner ved hjelp av en skreddesydd Gauss eliminasjon eller LU dekomposisjon.

Oppgave 3 En ikke-lineær ligning

3a

Vi skal løse ligningen

$$f(x) = x^3 - V = 0, \tag{4}$$

hvor $V > 0$ er en gitt konstant. Hvis $\{x_k\}$ er følgen generert ved Newton's metode, vis for $k = 0, 1, 2, \ldots$, at

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{V}{x_k^2}\right), \tag{5}$$

og gi en geometrisk tolkning av ligning (4) og iterasjonen (5).

Svar: Newton's metode er

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

(Fortsettes på side 5.)

og svaret følger fra og se at $f(x_k) = x_k^3 - V$ og $f'(x_k) = 3x_k^2$.

Vi kan tolke ligning (4) ved å betrakte x som sidelengden til en kube med volum V. I iterasjonen har vi en gitt kuboide med sidelengder x_k, x_k, og V/x_k^2, og vi setter x_{k+1} til å være gjennomsnittet av disse tre lengdene for så å finne de nye sidelengdene x_{k+1}, x_{k+1}, og V/x_{k+1}^2.

3b

Hvis $x_* > 0$ er roten til f i (4), og $e_k = x_k - x_*$, vis at

$$e_{k+1} = e_k^2 \left(\frac{2x_k + x_*}{3x_k^2} \right). \tag{6}$$

Svar: Siden $x_* = V^{1/3}$, har vi at

$$x_{k+1} = \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{x_*^3}{x_k^2}\right).$$

Da ser vi at

$$\begin{aligned}
e_{k+1} &= \frac{1}{3}\left(2x_k + \frac{x_*^3}{x_k^2}\right) - x_* \\
&= \frac{1}{3}\left(2(x_k - x_*) + \left(\frac{x_*^3}{x_k^2} - x_*\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(2e_k + \frac{x_*(x_*^2 - x_k^2)}{x_k^2}\right) \\
&= \frac{e_k}{3}\left(2 - \frac{x_*(x_* + x_k)}{x_k^2}\right) \\
&= \frac{e_k}{3x_k^2}(2x_k^2 - x_*^2 - x_* x_k).
\end{aligned}$$

3c

Anta nå at vi reduserer 'søke-rommet' ved å anta at

$$1/8 \le V < 1. \tag{7}$$

La h være funksjonen gitt ved $h(V) = V^{1/3}$. Ved å finne den lineære interpolanten g til h, bestemt av betingelsene $g(1) = h(1)$ og $g'(1) = h'(1)$, forklar hvorfor

$$x_0 = \frac{V+2}{3} \tag{8}$$

er et rimelig startverdi til skjemaet (5). Vis at den største mulige feilen $|e_0|$ i denne startverdien er $5/24$.

Svar: Interpolanten tar formen $g(V) = aV + b$. Interpolasjonsbetingelsene $g(1) = h(1)$ og $g'(1) = h'(1)$ gir to ligninger i de to ukjente a og b og den

(Fortsettes på side 6.)

entydige løsningen er $a = 1/3$ og $b = 2/3$. Dermed ser vi at $x_0 = g(V)$ og siden g approksimerer h, vil x_0 approksimere $x_* = V^{1/3}$.

Den største feilen oppstår når funksjonen $e(V) = g(V) - V^{1/3}$ oppnår et maksimum i absolutt verdi. Siden $e(1) = 0$ og $e'(V) \leq 0$ for $1/8 \leq V \leq 1$, ser vi at den største verdien til $e(V)$ forkommer i punktet $V = 1/8$. Dermed er den største mulige feilen

$$e(1/8) = g(1/8) - 1/2 = 5/24.$$

3d

Med startverdien x_0 i (8) vis følgende egenskaper:

(a) $x_* \leq x_0 \leq 1$,

(b) $x_{k+1} \geq x_*$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$,

(c) $x_{k+1} \leq x_k$, for $k = 0, 1, 2, \ldots$,

og dermed at

$$1/2 \leq x_* \leq \cdots \leq x_1 \leq x_0 \leq 1.$$

Svar:
(a) Siden $V \leq 1$ er $x_0 \leq 1$. Siden $x_0 = g(V)$ og $g(V) \geq h(V)$ er $x_0 \geq V^{1/3}$.
(b) Ligning (6) viser at $e_{k+1} \geq 0$ og dermed at $x_{k+1} \geq x_*$.
(c) Fra ligning (5) ser vi at

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{3}\left(\frac{V}{x_k^2} - x_k\right) = \frac{1}{3x_k^2}\left(x_*^3 - x_k^3\right) \leq 0,$$

på grunn av (a) og (b).

3e

Vis for $k = 0, 1, 2, \ldots$, at

$$|e_{k+1}| \leq 2|e_k|^2,$$

og dermed at

$$|2e_k| \leq |2e_{k-1}|^2 \leq \ldots \leq |2e_0|^{2^k},$$

og estimer antall interasjoner k som må brukes for å garantere en feil som er innen 10^{-16}.

Svar: Fra ligning (6) og ulikheten $x_* \leq x_k$, ser vi at

$$e_{k+1} \leq e_k^2/x_k \leq 2e_k^2,$$

og dermed at

$$|2e_k| \leq |2e_0|^{2^k} \leq (5/12)^{2^k}.$$

For å finne den minste mulige k slik at $|e_k| \leq 10^{-16}$, kan vi løse ligningen

$$2 \times 10^{-16} = (5/12)^{2^k},$$

(Fortsettes på side 7.)

som gir

$$2^k = \frac{\log(2 \times 10^{-16})}{\log(5/12)} \approx 41.3.$$

Siden $2^5 = 32 < 41.3$ og $2^6 = 64 > 41.3$, ser vi at $k = 6$ er minimum antall iterasjoner som garantererer toleransen med dette estimatet.

3f

Du skal nå bruke estimatet fra forrige oppgave til å skrive en MATLAB funksjon som til et vilkårlig gitt positivt tall V finner tredjeroten $V^{1/3} \in \mathbb{R}$ med en feil $\leq 10^{-16}$. Forklar først hvordan du kan finne et entydig heltall n og reelt tall m, med $1/8 \leq m < 1$, slik at $V = 8^n m$, og dermed $V^{1/3} = 2^n m^{1/3}$.

Svar:

```
function x = MyCubeRoot(V)

p = 1;
m = V;
while m >= 1, m = m/8; p = 2*p; end
while m < 0.25, m = m*8; p = p/2; end

x = (m + 2) / 3;
for k = 1:6
  x = (2 * x + (m/(x * x))) / 3;
end
x = x * p;
```

Lykke til!