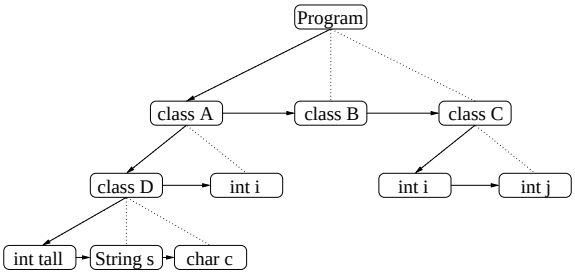
TRÆR

Dagens plan:

- Kort repetisjon
  - Generelle trær
- Binærtrær
  - Implementasjon
  - Traversering
- Binære søketrær
  - Definisjon
  - Søking, innsetting og sletting
  - Gjennomsnitts-analyse (!)
  - Eksempel: Ibsens skuespill

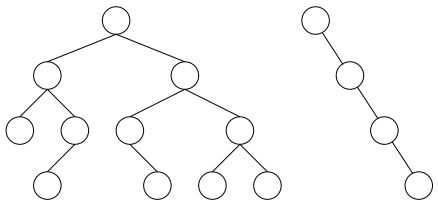
Generelle trær




```
class TreNode {
    Object element;
    TreNode forsteBarn;
    TreNode nesteSosken;
}
```


Binærtrær

Et binærtre er et tre der hver node aldri har mer enn to barn. Dersom det bare er ett subtre, må det være angitt om dette er venstre eller høyre subtre.



I verste fall blir dybden N-1!

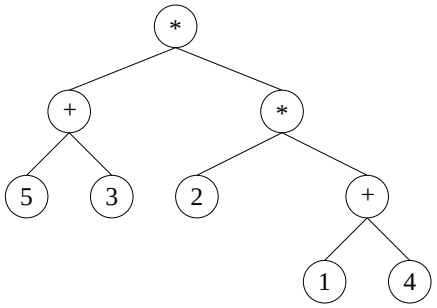
Implementasjon

Siden hver node har maks to barn, kan vi ha pekere direkte til dem:

```
class BinNode {
    int tall;
    BinNode venstre;
    BinNode hoyre;
}
```


Eksempel: Uttrykkstrær

I uttrykkstrær inneholder bladnodene operander (konstanter, variable, . . .), mens de interne nodene inneholder operatorer.



Mulige skrivemåter for dette uttrykket:

- Prefiks:
- Infiks:
- Postfiks:

Traversering av binærtrær — oppsummering

```
void traverser(BinNode n) {
   if (n != null) {
      < Gjør PREFIKS-operasjonene >
      traverser(n.venstre);
      < Gjør INFIKS-operasjonene >
      traverser(n.hoyre);
      < Gjør POSTFIKS-operasjonene >
   }
}
```

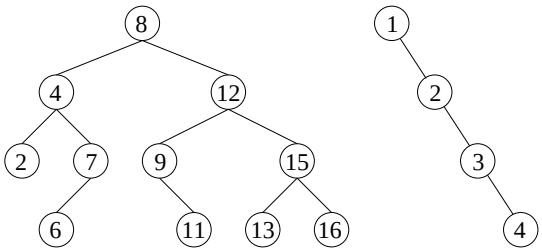

Oppgave 4.5

Vis at et binærtre med høyde h har maksimalt $2^{h+1} - 1$ noder.

Binære søketrær

Binære søketrær er en variant av binærtrær hvor følgende holder for hver node i treet:

- Alle verdiene i nodens **venstre** subtre er **mindre** enn verdien i noden selv.
- Alle verdiene i nodens **høyre** subtre er **større** enn verdien i noden selv.



Hva hvis vi har like verdier?
(→ ukeoppgave)

Søking: Rekursiv metode

```
public BinNode finn(int x, BinNode t) {
   if (t == null) {
      return null;
   } else if (x < t.tall) {
      return finn(x, t.venstre);
   } else if (x > t.tall) {
      return finn(x, t.hoyre);
   } else {
      return t;
   }
}
```

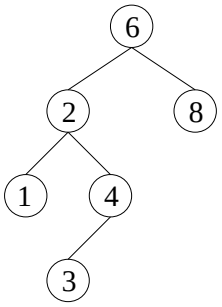
Søking: Ikke-rekursiv metode

```
public BinNode finn(int x, BinNode t) {
    BinNode n = t;
    while (n != null && n.tall != x) {
        if (x < n.tall) {
            n = n.venstre;
        } else {
            n = n.hoyre;
        }
    }
    return n;
}
```


Innsetting

Ideen er enkel:

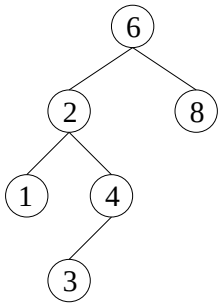
- Gå nedover i treet på samme måte som ved søking.
- Hvis tallet finnes i treet allerede gjøres ingenting.
- Hvis du kommer til en null-peker uten å ha funnet tallet: sett inn en ny node (med tallet) på dette stedet.



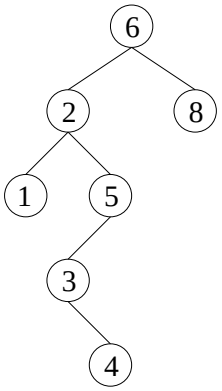
Sletting

Sletting er vanskeligere. Etter å ha funnet noden som skal fjernes har vi flere mulige situasjoner.

- Noden er en bladnode:
  - Kan fjernes direkte.
- Noden har bare ett barn:
  - Foreldrenoden kan enkelt hoppe over den som skal fjernes.



- Noden har to barn:
  - Erstatt verdien i noden med den minste verdien i **høyre** subtre.
  - Slett noden som denne minste verdien var i.



Rekursiv metode for å fjerne et tall:

```
public BinNode fjern(int x, BinNode t) {
   if ( t == null) {
      return null;
   }

   if (x < t.tall) {
      t.venstre = fjern(x, t.venstre);

   } else if (x > t.tall) {
      t.hoyre = fjern(x, t.hoyre);

   } else if (t.venstre != null &&
              t.hoyre != null) {
      t.tall = finnMinste(t.hoyre);
      t.hoyre = fjern(t.tall, t.hoyre);

   } else if (t.venstre != null) {
     t = t.venstre;

   } else {
      t = t.hoyre;
   }

   return t;
}
```


Gjennomsnitts-analyse

Intuitivt vil vi forvente at alle operasjonene vi utfører på et binært søketre vil ta $O(log\ n)$ tid siden vi hele tiden grovt sett halverer størrelsen på treet vi jobber med.

Det kan bevises at den **gjennomsnittlige dybden** til nodene i treet er $O(log\ n)$ når alle innsettingsrekkefølger er like sannsynlige (se MAW kapittel 4.3.5).

Eksempel: Ibsen

Problem: Vi ønsker å analysere Henrik Ibsens skuespill.

- **Hvilke** ord har Ibsen brukt?
- Hvor mange **forskjellige** ord?
- Hvilke ord er **mest** brukt?

De mest brukte ordene (fra UiB):

	Antall	%	Kum.	
1	19506	3.09	3.09	det
2	18241	2.89	5.98	jeg
3	17746	2.81	8.80	og
4	13232	2.10	10.89	i
5	13165	2.09	12.98	er
6	9639	1.53	14.51	at
7	9312	1.48	15.98	du
8	8927	1.42	17.40	ikke
9	8311	1.32	18.72	de
10	7711	1.22	19.94	en
11	7299	1.16	21.10	har
12	7152	1.13	22.23	som
13	6971	1.11	23.34	mig
14	6901	1.09	24.43	for
15	6795	1.08	25.51	til
16	6671	1.06	26.56	så
17	6314	1.00	27.56	med
18	5543	0.88	28.44	han
19	5524	0.88	29.32	den
20	5311	0.84	30.16	på

Vildanden

Vi skal se på ett av Ibsens skuespill:

VILDANDEN. SKUESPIL I FEM AKTER
AF HENRIK IBSEN. København. 1884

PERSONERNE:
Grosserer Werle , værksejer o+s+v+
Gregers Werle , hans søn. Gamle Ekdal.
Hjalmar Ekdal , den gamles søn, fotograf.
Gina Ekdal , Hjalmars hustru.
Hedvig , deres datter, 14 år.
Fru Sørby , grossererens husbestyrerinde.
Relling , læge. Molvik , forhenværende teolog.
Bogholder Gråberg.
Pettersen , grossererens tjener.
Lejetjener Jensen. En blegfed herre.
En tyndhåret herre. En nærsynt herre.
Sex andre herrer, middagsgæster hos grossereren.
Flere lejetjenere.

Første akt foregår hos grosserer Werle, de fire følgende akter hos fotograf Ekdal..

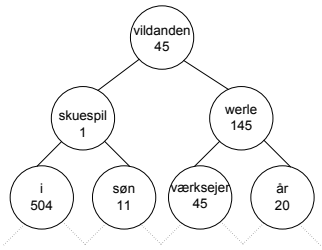
FØRSTE AKT.

I grosserer Werles hus. Kostbart og bekvemt indrettet arbejdsværelse; bogskabe og stoppede møbler; skrivebord med papirer og protokoller midt på gulvet; tændte lamper med grønne skærme, således at værelset er dæmpet belyst. Åben fløjdør med fratrukne forhæng på bagvæggen.

Implementasjon

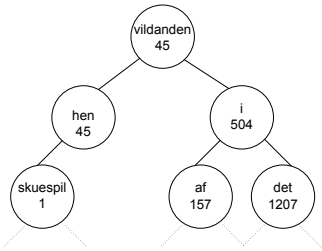
Hvilke ord har Ibsen brukt?

Ide: Leser inn ordene fra fil og lagrer dem i et binært søketre. Like ord telles opp.



Hvilke ord er mest brukt?

Ide: Lager et nytt søketre sortert på antall ganger hvert ord er brukt!




```
import easyIO.*;

public class Ibsen {
   public static void main(String[] args) {
      String ord;
      int antallOrd = 0;
      IbsenTre tre = new IbsenTre();
      FrekvensTre frekTre = new FrekvensTre();

      String sep = ". :,;-?!\"\n";
      In innfil = new In(args[0]);
      innfil.skipSep(sep);

      while (!innfil.endOfFile()) {
         ord = innfil.inWord(sep).toLowerCase();
         tre.settInn(new IbsenElem(ord));
         antallOrd++;
         innfil.skipSep(sep);
      }

      System.out.println("Antall ord: " + antallOrd);
      System.out.println("Ulike ord: " + tre.size());

      frekTre.innsetting(tre.getRot());
      frekTre.skrivInnfiks();
   }
}
```


Klassen BinNode

Vanlig node i binært søketre:

```
class BinNode {
   Comparable element;
   BinNode venstre;
   BinNode hoyre;

   BinNode(Comparable x) {
      element = x;
   }
}
```


Klassen IbsenElem

Tar vare på ordene og teller opp antall forekomster:

```
class IbsenElem implements Comparable {
   String ord; int antall;

   IbsenElem (String s) {
      ord = s;
      antall = 1;
   }

   public int compareTo(Object x) {
      IbsenElem e = (IbsenElem) x;
      return ord.compareTo(e.ord);
   }

   public String toString() {
      return (ord + " " + antall);
   }
}
```

Klassen BinSokeTre

Generell klasse for binære søketrær der "noe gjøres" ved like elementer:

- void settInn(Comparable x)
- void oppdater(BinNode n, Comparable x)
  - Kalles av settInn hvis x allerede finnes i treet (i node n). Default: Ingenting gjøres.
- int sammenlign(Comparable n1, Comparable n2)
  - Kalles av settInn for å sammenligne elementet som skal settes inn med de som allerede finnes i treet. Default: n1.compareTo(n2).
- int size()
- BinNode getRot()

Tre sortert på ord:

```
class IbsenTre extends BinSokeTre {

   void oppdater(BinNode n, Comparable e) {
      IbsenElem ie = (IbsenElem) n.element;
      ie.antall++;
   }

}
```

NB! Treet blir veldig skjevt, med 3388 noder i venstre subtre og bare 158 noder i høyre subtre.

Hva er årsaken til dette?

Tre sortert på frekvens:

```
class FrekvensTre extends BinSokeTre  {

   int sammenlign(Comparable c1, Comparable c2) {

      IbsenElem e1 = (IbsenElem) c1;
      IbsenElem e2 = (IbsenElem) c2;

      return e1.antall - e2.antall;
   }

   void oppdater(BinNode n, Comparable e) {
      if (n.venstre == null) {
         n.venstre = new BinNode(e);
      } else {
         BinNode b = new BinNode(e);
         b.venstre = n.venstre;
         n.venstre = b;
      }
      antallNoder++;
   }

   void innsetting(BinNode n) {
      if (n != null) {
         settInn(n.element);
         innsetting(n.venstre);
         innsetting(n.hoyre);
      }
   }
}
```


Binære søketrær: oppsummering