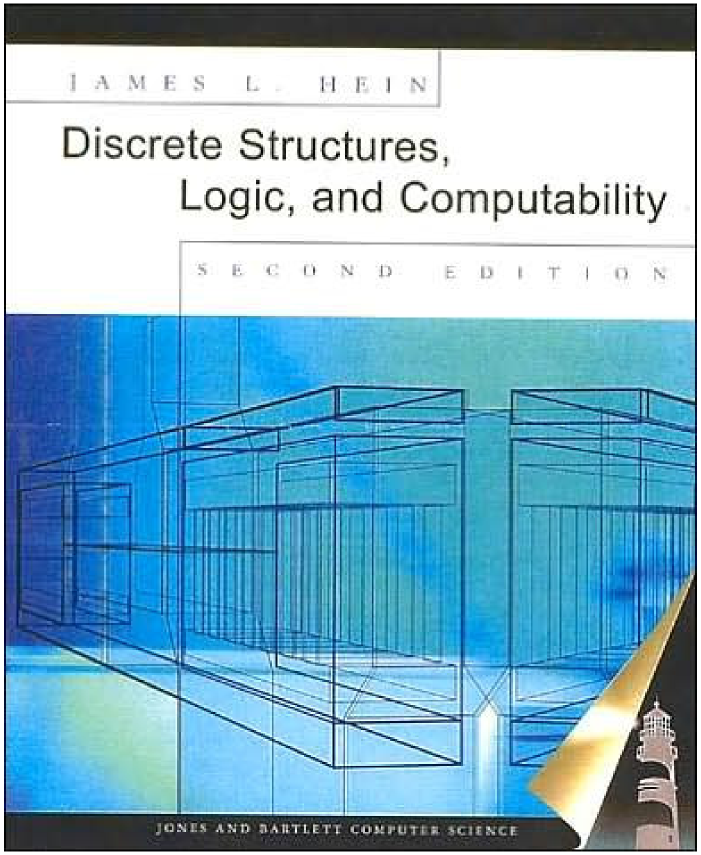
# INF1800

## Logikk og Beregnbarhet

# Lærebok: Discrete Structures, Logic, and Computability




- Utdrag blir pensum.
- Obs: Første opplag inneholder *mange* feil, andre opplag inneholder *noen* feil. Har du kjøpt boken på Akademika, er den antakelig fra andre opplag. Da inneholder den feilene merket [1,2] her. Rettelsene er pensum; det er ditt ansvar å sjekke.

- Logikk
  - Språk:
    - Uttrykke betingelser på en helt presis måte.
  - Kalkyle
    - Gjennomføre logiske slutninger
- Beregninger
  - Hva er beregnbart?
    - Hva betyr dette?
    - Ikke alt kan beregnes
  - Modeller for beregnbarhet
    - Endelige automater
    - Stakkautomater
    - Turingmaskiner

# Logiske slutninger

FRA

- Premisser
  - Kyr er klovdyr
  - Klovdyr er dyr
  - Klovdyr er vegetarianere
  - Vegetarianere spiser ikke dyr
  - Dagros og Litago er kyr

---

TIL

- Konklusjon
  - Dagros spiser ikke Litago

- Premisser
  - Kyr er klovdyr
  - Klovdyr er dyr
  - Klovdyr er vegetarianere
  - Vegetarianere spiser ikke dyr

FRA

  - Dagros og Litago er kyr
  - Et dyrs venstre bakbein er en del av dyret
  - Hvis noen spiser er del av et dyr, så spiser de dyret

---

TIL

- Konklusjon
  - Dagros spiser ikke Litagos venstre bakbein ???

– Dyr som har kugalskap spiser hjernen på en sau

– Hjernen på et dyr er en del av dyret

– Kyr er klovdyr

– Klovdyr er dyr

– Klovdyr er vegetarianere

– Vegetarianere spiser ikke dyr

– Dagros og Litago er kyr

–Et dyrs venstre bakbein er en del av dyret

–Hvis noen spiser er del av et dyr, så spiser de dyret

---

– Ingen kyr har kugalskap

# Sterke og svake logikker/logikksystemer

- Vi skal ikke se på bare en type logikk, men på flere.  Logikker kan ofte graderes etter en skala, der de svakeste svarer til argumenter som kan gjennomføres når man bare vet betydningen av noen få, enkle ord.

Eksempel:
Selv om man bare kjenner betydningen av ordet *alle*,
vet man at følgende resonnement er gyldig:

- Premisser:
  - Alle kyr er klovdyr
  - Litago er ei ku
- Konklusjon:
  - Litago er et klovdyr

Tilsvarende:

- Utsagnslogikk
  - Resonnmenter som kan gjennomføres bare ved å vite betydningen av (utsagnslogiske) konnektiver

Eksempel:

Litago sover eller Litago spiser

Litago sover ikke

-------------------------------------

Litago spiser

- Konnektiver:
  - Småord som knytter sammen hele setninger/utsagn til nye hele setninger/utsagn.

Eksempler: hvis

Hvis …. så

og

eller

ikke

# Oversettelse fra norsk til språket for utsagnslogikk

| Norsk | Logikkspråk |
|---|---|
| • Litago sover | • A |
| • Litago spiser | • B |
| • Litago spiser ikke | • ¬B |
| • Litago sover eller Litago spiser | • A ∨ B |

# Oversettelse kan involvere:

Hvis laget vinner cupen eller serien,
så beholder treneren jobben

"pynting"

Hvis laget vinner cupen eller laget vinner serien, så beholder treneren jobben

innsetting av symboler

(laget vinner cupen $\vee$ laget vinner serien) $\rightarrow$ treneren beholder jobben

"anonymisering"

$(A \vee B) \rightarrow C$

# Sannhetsverditabell

En sannhetsverditabell er en oversikt over hvilke sannhetsverdier et utsagn vil ha i alle mulige tilfeller.

I utgangspunktet har vi

en tabell for hvert konnektiv,

og ut fra disse kan man så avlede

tabeller for alle sammensatte utsagn.

# Tautologier

| | P | Q | (P & Q) -> Q | |
|---|---|---|---|---|
| 0) | T | T | T | T |
| 1) | T | F | F | T |
| 2) | F | T | F | T |
| 3) | F | F | F | T |

| | P | Q | ((P & Q) & !P) -> Q | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0) | T | T | T | F | F | T |
| 1) | T | F | F | F | F | T |
| 2) | F | T | F | F | T | T |
| 3) | F | F | F | F | T | T |

| | P | Q | (P v Q) v !(P & Q) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0) | T | T | T | T | F | T |
| 1) | T | F | T | T | T | F |
| 2) | F | T | T | T | T | F |
| 3) | F | F | F | T | T | F |

En tautologi er et utsagn som alltid er sant, det vil si som har T i hver linje av sannhetsverditabellen.

# Utsagnslogisk/Tautologisk konsekvens

| | P | Q | P & !Q | | P v (P & !Q) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0) | T | T | F | F | T | F | F |
| 1) | T | F | T | T | T | T | T |
| 2) | F | T | F | F | F | F | F |
| 3) | F | F | F | T | F | F | T |

T

| | P | Q | P & (P -> Q) | | P & Q |
|---|---|---|---|---|---|
| 0) | T | T | T | T | T |
| 1) | T | F | F | F | F |
| 2) | F | T | F | T | F |
| 3) | F | F | F | T | F |

T

| | P | Q | (P & !Q) | | -> | (P v (P & !Q)) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0) | T | T | F | F | T | T | F | F |
| 1) | T | F | T | T | T | T | T | T |
| 2) | F | T | F | F | T | F | F | F |
| 3) | F | F | F | T | T | F | F | T |

| | P | Q | (P & (P -> Q)) | | -> | (P & Q) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0) | T | T | T | T | T | T |
| 1) | T | F | F | F | T | F |
| 2) | F | T | F | T | T | F |
| 3) | F | F | F | T | T | F |

Et utsagn B er en tautologisk konsekvens av et utsagn A hvis og bare hvis B alltid er sann når A er sann. (Altså hviss B er sann i alle linjer der A er sann.).

Altså: B er en tautologisk konsekvens av A hvis og bare hvis $(A \rightarrow B)$ er en tautologi.

# Biimplikasjon/Biconditional $\leftrightarrow$

$(A \leftrightarrow B)$ har samme sannhetsverditabell

som $((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

| A | B | A <=> B |
|---|---|---|
| T | T | T |
| T | F | F |
| F | T | F |
| F | F | T |

| A | B | (A => B) | & | (B => A) |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T |
| F | T | T | F | F |
| F | F | T | T | T |

"hvis og bare hvis" (forkortet hviss) oversettes med $\leftrightarrow$

# Oversettelse

Jeg spiser det bare hvis det er godt

jeg spiser det $\rightarrow$ det er godt

Jeg er kresen

Jeg spiser det hvis det er godt

jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt

det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det

Jeg er glupsk

Jeg spiser det hvis og bare hvis det er godt

jeg spiser det $\leftrightarrow$ det er godt

Jeg spiser det hviss det er godt

I eat it iff it is good

Jeg er glupsk men kresen

# (Utsagnslogisk/Tautologisk) ekvivalens

T

| P | Q | P & | (P -> Q) | P & Q |
|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | F |
| F | T | F | T | F |
| F | F | F | T | F |

T

| P | Q | (P & | (P -> Q)) | <-> | (P & Q) |
|---|---|---|---|---|---|
| T | T | T | T | T | T |
| T | F | F | F | T | F |
| F | T | F | T | T | F |
| F | F | F | T | T | F |

To utsagn A og B er (tautologisk) ekvivalente hvis (og bare hvis) de alltid har samme sannhetsverdi
(er sanne i de samme linjene av sannhetsverditabellen)

Altså: A og B er en tautologisk ekvivalente hvis og bare hvis ($A \leftrightarrow B$) er en tautologi.

# Ekvivalens

Vi skriver $A \equiv B$ hvis A og B er ekvivalente

## Eksempler:

$$((A \vee B) \wedge C) \equiv ((A \wedge C) \vee (B \wedge C))$$

$$((A \vee B) \vee C) \equiv (A \vee (B \vee C))$$

$$((A \wedge B) \wedge C) \equiv ((A \wedge (B \wedge C))$$

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$$