Substitusjon/Innsetting

$A(P/B)$ Setter inn vff'en B for alle forekomster av utsagnsvariabelen P i vff'en A

Eksempel:

$$((Q \wedge R) \vee (Q \rightarrow S))(Q/(S \rightarrow R))$$

$$= (((S \rightarrow R) \wedge R) \vee ((S \rightarrow R) \rightarrow S))$$

Instansieringsregel for tautologier

Hvis A er en tautologi, så er $A(P/B)$ en tautologi

Eksempel:

Siden $(P \rightarrow (Q \rightarrow P))$ er en tautologi,

så er $((Q \wedge \neg R) \rightarrow (Q \rightarrow (Q \wedge \neg R)))$ det også

Ekvivalens

- To wff'er A og B er ekvivalente hviss de alltid har samme sannhetsverdi, altså hviss $A \leftrightarrow B$ er en tautologi.

$A \equiv B$ uttrykker påstanden at A og B er ekvivalente.

$A \equiv B$ er altså en påstand om to wff'er A og B, men er ikke selv noen wff. Det gir for eksempel ikke mening å spørre om sannhetsverditabellen til $\equiv$

Instansieringsregel for ekvivalenser

Hvis $A \equiv C$, så $A(P/B) \equiv C(P/B)$

Eksempel:

Siden $\neg(P \rightarrow Q) \equiv (P \wedge \neg Q)$,

har vi også $\neg(P \rightarrow (P \wedge \neg R)) \equiv (P \wedge \neg(P \wedge \neg R))$

Substitusjonsregel for ekvivalenser

Hvis $B \equiv C$, så $A(P/B) \equiv A(P/C)$

Eksempel:

Siden $\neg(Q \to R) \equiv (Q \wedge \neg R)$,

har vi også $(Q \wedge \neg\neg(Q \to R)) \equiv (Q \wedge \neg(Q \wedge \neg R))$

Begreper/temaer videre idag

- Ekvivalenser som *omskrivningsregler*
- Disjunktiv normalform, og metoder for å finne dette
- Full disjunktiv normalform

Noen nyttige ekvivalenser

$$(A \land B) \land C \;\equiv\; A \land (B \land C)$$
$$(A \lor B) \lor C \;\equiv\; A \lor (B \lor C)$$

(assosiativitet for $\land$ og assosiativitet for $\lor$)

$$(A \land B) \;\equiv\; (B \land A)$$
$$(A \lor B) \;\equiv\; (B \lor A)$$

(kommutativitet for $\land$ og kommutativitet for $\lor$)

$$(A \land (B \lor C)) \;\equiv\; (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$(A \lor (B \land C)) \;\equiv\; (A \lor B) \land (A \lor C)$$

(distributivitet)

(mange flere side 354)

Bruk av ekvivalenser som *omskrivningsregler*

$$\neg((P \to Q) \to (Q \to R))$$
$$\equiv (P \to Q) \wedge \neg (Q \to R))$$
$$\equiv (P \to Q) \wedge (Q \wedge \neg R))$$
$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge \neg R))$$
$$\equiv ((Q \wedge \neg R) \wedge (\neg P \vee Q))$$
$$\equiv ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee ((Q \wedge \neg R) \wedge Q)$$

bruker $\neg (A \to B) \equiv (A \wedge \neg B)$

$$\neg (A \to B) \equiv (A \wedge \neg B)$$
$$(A \to B) \equiv (\neg A \vee B)$$
$$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$$
$$(A \wedge (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

litteral

fundamental konjunksjon

disjunktiv normalform

Bruk av ekvivalenser som *omskrivningsregler*

$$\neg((P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow R))$$

bruker $\neg(A \rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$

$$\equiv (P \rightarrow Q) \wedge \neg(Q \rightarrow R))$$

$\neg(A \rightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B)$

$$\equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \wedge \neg R))$$

$(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$

$$\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (Q \wedge \neg R))$$

$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$

$$\equiv ((Q \wedge \neg R) \wedge (\neg P \vee Q))$$

$(A \wedge (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$$\equiv ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee ((Q \wedge \neg R) \wedge Q)$$

$(A \wedge B) \equiv (B \wedge A)$

$$\equiv ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee (Q \wedge (Q \wedge \neg R))$$

$(A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$

$$\equiv ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee ((Q \wedge Q) \wedge \neg R)$$

$(A \wedge A) \equiv A$

$$\equiv ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg R)$$

…og videre til *full disjunktiv normalform*…

$$((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee (Q \wedge \neg R)$$

$$\equiv \; ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee ((Q \wedge \neg R) \wedge \text{true})$$

$$\equiv \; ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee ((Q \wedge \neg R) \wedge (P \vee \neg P))$$

$$A \equiv (A \wedge \text{true})$$

$$\text{true} \equiv (A \vee \neg A)$$

$$(A \wedge (B \vee C)) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$

$$\equiv \; ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P) \vee (((Q \wedge \neg R) \wedge P) \vee ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P))$$

$$\equiv ((Q \wedge \neg R) \wedge P) \vee ((Q \wedge \neg R) \wedge \neg P)$$

FULL DISJUNKTIV NORMALFORM