Disjunktiv normalform, oppsummering

type av formel	definisjon	eksempler
Et litteral	… er en utsagnsvariabel eller negasjonen av en utsagnsvariabel.	P $\neg P$ Q S $\neg R$
En fundamental konjunksjon	…er en konjunksjon av (en eller flere) litteraler.	$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S)$ $(P \wedge \neg Q \wedge \neg P)$ P
En formel i disjunktiv normalform	…er en disjunksjon av (en eller flere) fundamentale konjunksjoner.	$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg P) \vee P$ $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R \wedge S)$ P $\neg R$ $(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

En formel i *full disjunktiv normalform* er en disjunksjon av fundamentale konjunksjoner som alle inneholder de samme utsagnsvariablene, med én forekomst av hver.

$$(P \wedge \neg Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$$

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$$

Enhver formel (som ikke er en kontradiksjon) er ekvivalent til en formel i disjunktiv normalform, og faktisk til en formel i full disjunktiv normalform.

To metoder for å finne slike normalformsformler, den ene ved hjelp av ekvivalenser/omskrivningsregler, den andre ved hjelp av sannhetsverditabeller.

Ved hjelp av ekvivalenser:

0. Bruk (for eksempel) true $\equiv (A \vee \neg A)$ og false $\equiv (A \wedge \neg A)$ til å fjerne alle forekomster av true og false.
1. Bruk $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ til å fjerne alle implikasjonstegn.
2. Bruk $\neg\neg A \equiv A$, $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$ og $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$ til å flytte alle negasjonstegn inn i litteraler.
3. Bruk $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ og $(B \vee C) \wedge A \equiv (B \wedge A) \vee (C \wedge A)$ til å flytte alle konjunksjoner innenfor alle disjunksjoner.

(denne metoden – slik den er beskrevet så langt -- sikrer ikke full disjunktiv normalform, men det er mulig å legge til et fjerde punkt (se nederste boks side 363) som sikrer dette)

Ved hjelp av sannhetsverditabell:

1. Finn sannhetsverditabellen:
2. Lag en fundamental konjunksjon for hver linje med T i hoved-kolonnen (den røde kolonnen):
3. Lag disjunksjonen av disse.

P	Q	R	!((P -> Q) -> ((Q -> R) -> P))				
T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	F	T	F
F	T	F	F	T	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	F	T	F

$$(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

denne metoden sikrer full disjunktiv normalform

(… når opprinnelig formel er oppfyllbar…)

og viser at $\neg$ og $\vee$ og $\wedge$ til sammen er en komplett mengde av konnektiver

Enhver formel er ekvivalent til en formel som bare inneholder disse konnektivene.

Konjunktiv normalform, oppsummering

type av formel	definisjon	eksempler
Et litteral	… er en utsagnsvariabel eller negasjonen av en utsagnsvariabel.	P $\neg P$ Q S $\neg R$
En fundamental disjunksjon	…er en disjunksjon av (en eller flere) litteraler.	$(P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S)$ $(P \vee \neg Q \vee \neg P)$ P
En formel i konjunktiv normalform	…er en konjunksjon av (en eller flere) fundamentale disjunksjoner.	$(P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg P) \wedge P$ $(P \vee \neg Q \vee \neg R \vee S)$ P $\neg R$ $(P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R)$

En formel i full konjunktiv normalform er en konjunksjon av fundamentale disjunksjoner som alle inneholder de samme utsagnsvariablene, med én forekomst av hver.

$$(P \vee \neg Q \vee \neg R) \;\wedge\; (P \vee Q \vee R)$$

$$(P \vee Q) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

$$(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q \vee \neg R) \wedge (\neg P \vee \neg Q \vee R)$$

Ethvert utsagn (som ikke er en tautologi) er ekvivalent til et utsagn i konjunktiv normalform, og faktisk til et utsagn i full konjunktiv normalform

Kan finne slike normalformsformler…

… direkte ved hjelp av ekvivalenser som ligner dem vi bruker for å finne disjunktiv normalform

eller

…ved å sette negasjon foran, beregne (full) diskunktiv normalform av dette, og så bytte ut negasjon med disjunksjon og omvendt, og erstatte hvert litteral med motsetningen.

Eksempel

For å finne konjunktiv normalform av

$$(P \rightarrow Q) \rightarrow \neg\, (Q \rightarrow R)$$

Kan vi ta disjunktiv normalform av

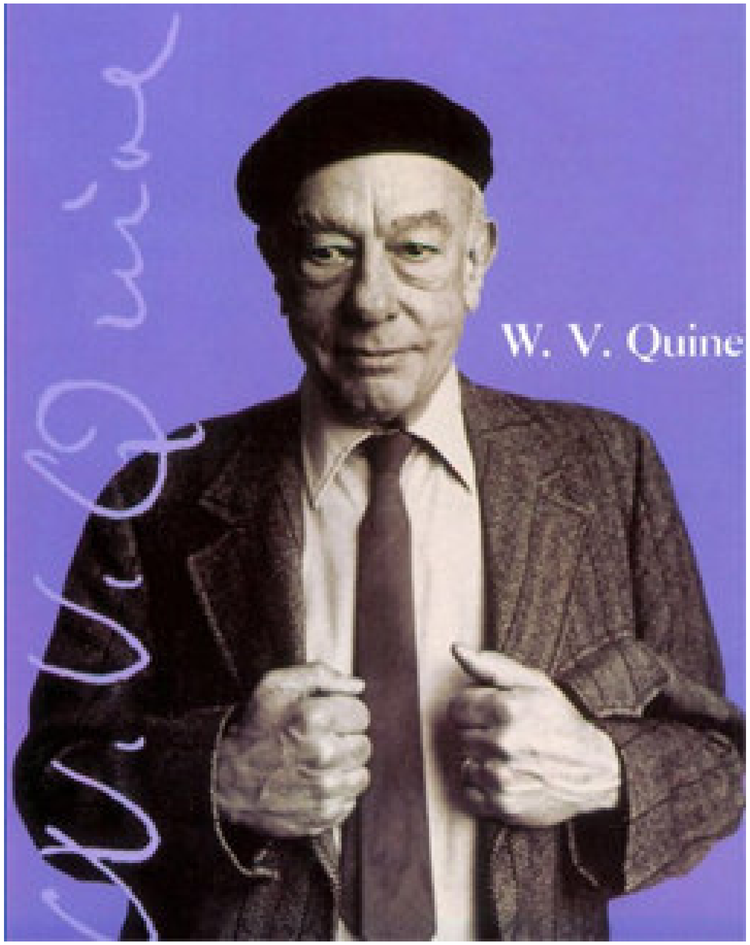
$$\neg\, ((P \rightarrow Q) \rightarrow \neg\, (Q \rightarrow R))$$

Nemlig

$$(\neg\, P \wedge \neg\, Q) \vee (\neg\, P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

Og så "snu" dette til

$$(P \vee Q) \wedge (P \vee \neg\, R) \wedge (\neg\, Q \vee \neg\, R)$$

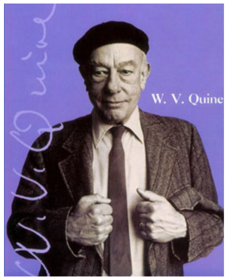


Willard Van Orman Quine (1908 – 2000)

Quines metode

… for å sjekke om noe er en tautologi

… ved bruk av omskrivningsregler



Quines metode

…benytter seg av ekvivalensene for fjerning av true og false:

$\neg$ false $\equiv$ true, $\neg$ true $\equiv$ false,

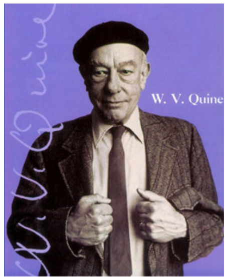
(false $\vee$ A) $\equiv$ A, (A $\vee$ false) $\equiv$ A, (true $\vee$ A) $\equiv$ true, (A $\vee$ true) $\equiv$ true,

(false $\wedge$ A) $\equiv$ false, (A $\wedge$ false) $\equiv$ false, (true $\wedge$ A) $\equiv$ A, (A $\wedge$ true) $\equiv$ A,

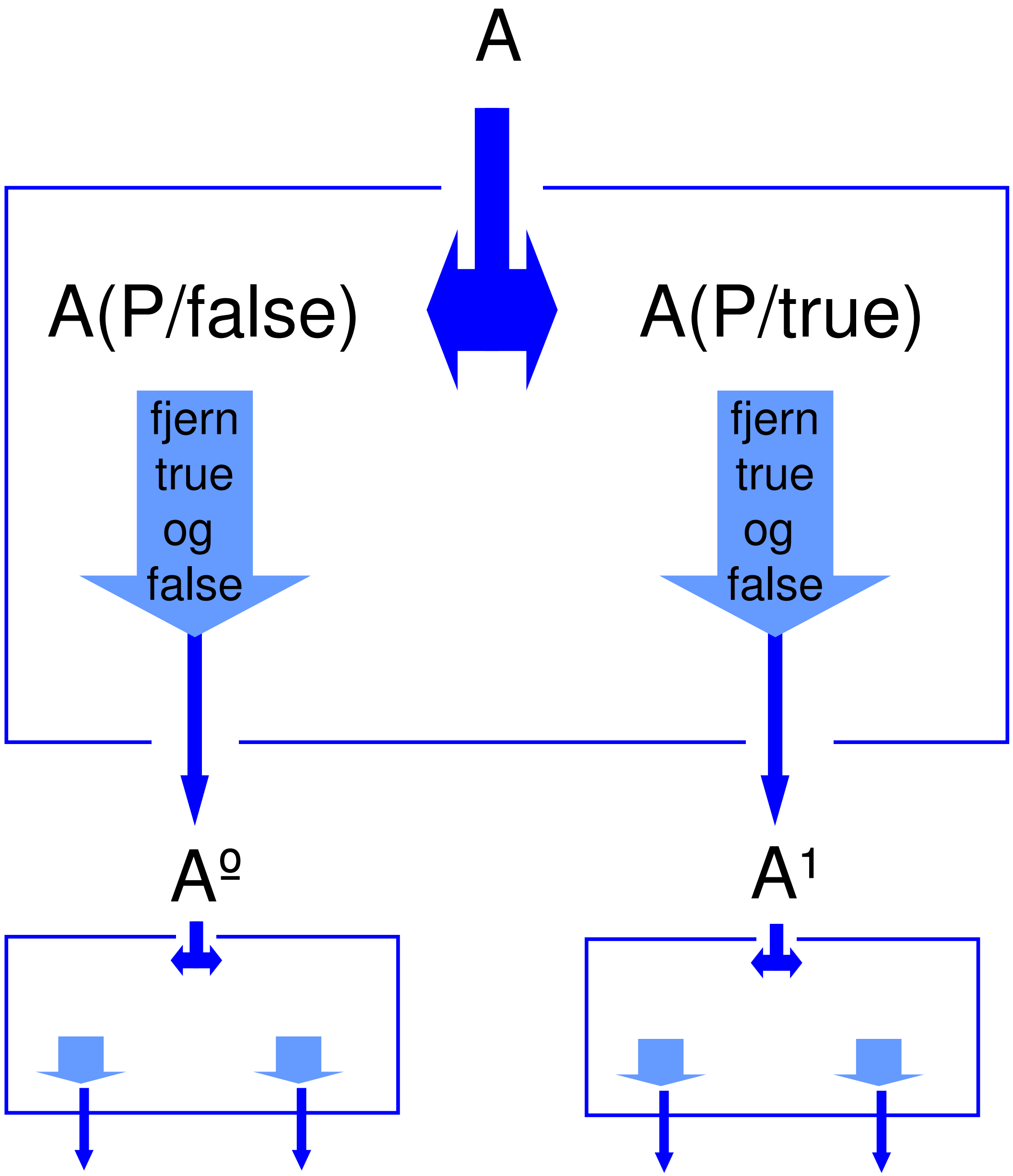
(false $\rightarrow$ A) $\equiv$ true, (A $\rightarrow$ false) $\equiv$ $\neg$ A, (true $\rightarrow$ A) $\equiv$ A, (A $\rightarrow$ true) $\equiv$ true

…samt observasjon at…

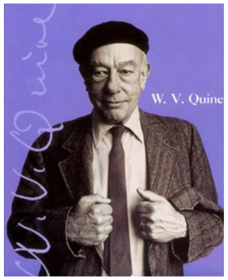
A er en tautologi hvis og bare hvis både A(P/true) og A(P/false) er tautologier



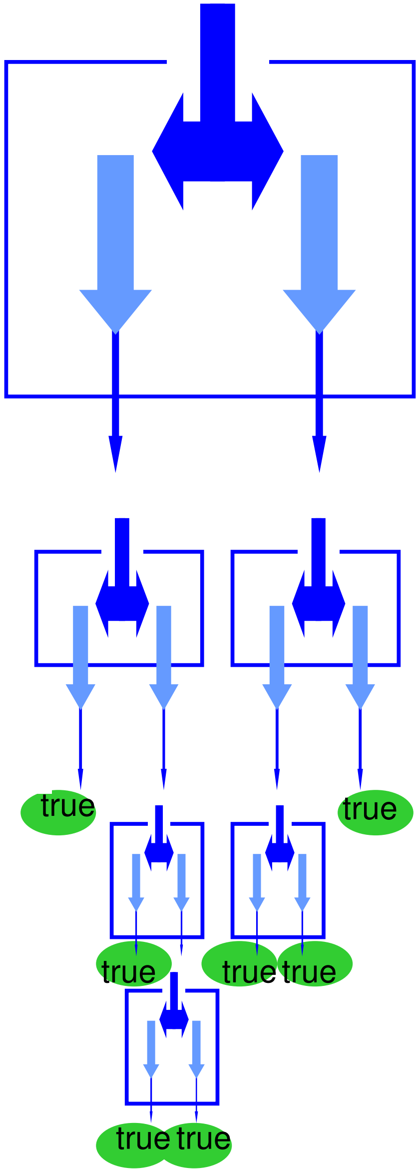
Quines metode:



…og så videre, men med færre utsagnsvariabler hver gang, så dette stopper til slutt opp…
.. med true eller false i alle ”utganger”

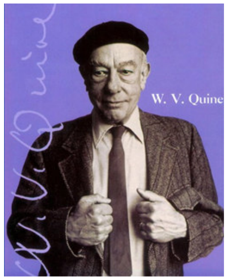


Quines metode, avslutning:

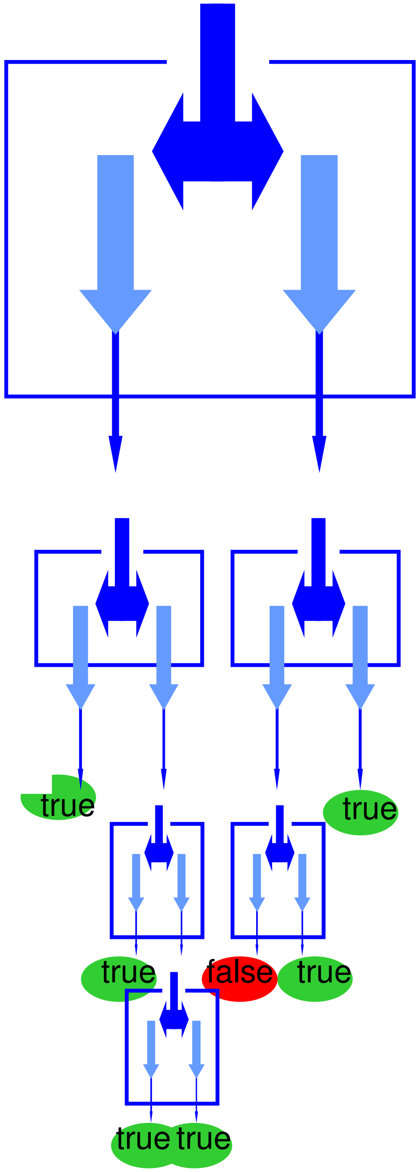


Det vi fikk inn (på "toppen") var en tautologi hviss vi stopper opp med true i alle "utganger"

OK

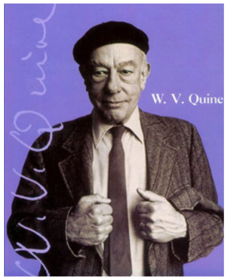


Quines metode, avslutning:



Det vi fikk inn (på “toppen”) var en tautologi hviss vi stopper opp med true i alle “utganger”

NIX



Eksempel

$$((P \wedge Q \rightarrow R) \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

(P/ true)

$((\text{true} \wedge Q \rightarrow R) \wedge (\text{true} \rightarrow Q)) \rightarrow (\text{true} \rightarrow R)$

$((\text{true} \wedge Q \rightarrow R) \wedge (\text{true} \rightarrow Q)) \rightarrow R$

$((Q \rightarrow R) \wedge (\text{true} \rightarrow Q)) \rightarrow R$

$((Q \rightarrow R) \wedge Q) \rightarrow R$

(Q/ false)

$((\text{false} \rightarrow R) \wedge \text{false}) \rightarrow R$

$\text{false} \rightarrow R$

true

(Q/ true)

$((\text{true} \rightarrow R) \wedge \text{true}) \rightarrow R$

$(\text{true} \rightarrow R) \rightarrow R$

$R \rightarrow R$

(R/ false)

$\text{false} \rightarrow \text{false}$

true

(R/ true)

$\text{true} \rightarrow \text{true}$

true

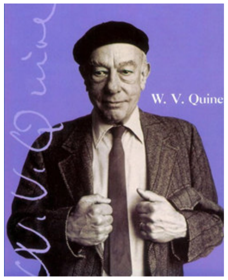
(P/ false)

$((\text{false} \wedge Q \rightarrow R) \wedge (\text{false} \rightarrow Q)) \rightarrow (\text{false} \rightarrow R)$

$((\text{false} \wedge Q \rightarrow R) \wedge (\text{false} \rightarrow Q)) \rightarrow \text{true}$

true

OK



Eksempel

$$((P \wedge Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

(P/ true)

(P/ false)

$((\text{true} \wedge Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (\text{true} \rightarrow R)$

$((\text{true} \wedge Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow R$

$((Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow R$

$((\text{false} \wedge Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (\text{false} \rightarrow R)$

$((\text{false} \wedge Q \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow \text{true}$

true

(Q/ false)

(Q/ true)

$((\text{false} \rightarrow R) \wedge (\text{false} \rightarrow R)) \rightarrow R$

$(\text{true} \wedge \text{true}) \rightarrow R$

$\text{true} \rightarrow R$

R

(R/ false)

(R/ true)

false

true

$((\text{true} \rightarrow R) \wedge (\text{true} \rightarrow R) \rightarrow R$

$(R \wedge R) \rightarrow R$

(R/ false)

(R/ true)

$(\text{false} \wedge \text{false}) \rightarrow \text{false}$

$\text{false} \rightarrow \text{false}$

true

$(\text{true} \wedge \text{true}) \rightarrow \text{true}$

true

NIX