

ND1800

Bevissystem for utsagnslogikk med konnektiver $\neg, \rightarrow, \wedge, \vee$, false, true:

$$\frac{A \rightarrow B, A}{\dots B} \text{ MP}$$

$$\frac{A \rightarrow B, \neg B}{\dots \neg A} \text{ MT}$$

$$\frac{A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D}{\dots C \vee D} \text{ CD}$$

$$\frac{A, B}{\dots A \wedge B} \text{ Conj}$$

$$\frac{A \vee A}{\dots A} \text{ Contr (Contraction)}$$

$$\frac{A \wedge B}{\dots B} \quad \frac{A \wedge B}{\dots A} \text{ Simp}$$

$$\frac{}{\dots A \vee \neg A} \text{ XM (Excluded middle)}$$

$$\frac{B}{\dots A \vee B} \quad \frac{A}{\dots A \vee B} \text{ Add}$$

$$\frac{}{\dots \text{true}} \text{ TI (Truth Introduction)}$$

$$\frac{A \vee B, \neg B}{\dots A} \quad \frac{A \vee B, \neg A}{\dots B} \text{ DS}$$

$$\frac{\text{false}}{\dots A} \text{ FE (Falsehood Elimination)}$$

... pluss spesiell regel CP

Ikke i boken

Et bevis er en (nummerert) liste av formler, der hvert formel enten er en premiss eller følger fra tidligere formler ved hjelp av regler.

Indentering antyder hvilke utsagn som avhenger av premisser.

Linje nr.		Begrunnelse (fra hvilke tidligere linjer, ved hvilken regel)	Avhenger av hvilke premisser?
1	$A \rightarrow B$	P	1
2	$\neg A \rightarrow B$	P	2
3	$A \vee \neg A$	XM	-
4	$B \vee B$	3,1,2 CD	1,2
5	B	4,Contr	1,2
6	$(\neg A \rightarrow B) \rightarrow B$	2,5,CP	1
7	$(A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B)$	1,6,CP	-

Fjerde kolonne...

... i bevisene holder rede på hvilke premisser de enkelte formlene avhenger av.

Reglene for slik “bokføring” er som følger:

Et premiss avhenger (bare) av seg selv.	6	$Q \wedge (Q \rightarrow R)$	P	6
Et aksiom avhenger ikke av noe.	9	$(Q \rightarrow R) \vee \neg (Q \rightarrow R)$	XM	
En formel avledet fra tidligere formler ved hjelp av en “vanlig” regel (dvs. alle regler unntatt CP (eller IP))	5	$(Q \wedge R) \rightarrow (Q \rightarrow R)$	Simp,4	1,2
“arver” alle avhengighetene fra disse tidligere formlene.	10	$(Q \wedge R)$	Conj, 6,7	1,7
	14	$(Q \rightarrow R)$	MP 5,10	1,2,7
En formel avledet ved hjelp av CP brukt på et premiss og en annen linje, vil arve alle avhengighetene fra denne linjen, unntatt dette premisset.	6	$Q \wedge (Q \rightarrow R)$	P	6
	15	$(R \wedge S)$	11,12, MP	1,6,7
	18	$Q \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow (R \wedge S)$	6,15, CP	1,7

1	$\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	T	-
2	$A \wedge \neg A \rightarrow \text{false}$	T	-
3	A	P	3
4	$\neg A$	P	4
5	$A \wedge \neg A$	3,4, Conj	3,4
6	false	2,5, MP	3,4
7	$\neg\neg A$	6, FE	3,4
8	$\neg A \rightarrow \neg\neg A$	4,7, CP	3
9	$\neg A \vee \neg\neg A$	XM	-
10	$\neg\neg A \vee \neg\neg A$	9,8,1, CD	3
11	$\neg\neg A$	10, Contr	3
12	$A \rightarrow \neg\neg A$	3,11, CP	-