Et bevis

1	$Q \rightarrow R$	P	1
2	$P \rightarrow Q$	P	2
3	P	P	3
4	Q	3,2,MP	2,3
5	R	4,1,MP	1,2,3
6	$P \rightarrow R$	3,5,CP	1,2
7	$(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,6,CP	1
8	$(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$	1,7,CP	-

Vi oppsummerer dette ved å skrive

$$\vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$$

ND1800 er

komplett

Hvis A er en tautologi, så finnes et bevis for A

Hvis A er tautologi, så $\vdash A$

Hvorfor?

sunt

Hvis det finnes et bevis for A, da er A en tautologi

Hvis $\vdash A$, så er A tautologi

Hvorfor?

Bevis fra premiss(er)

1	$Q \to R$	P	1
2	$P \to Q$	P	2
3	P	P	3
4	Q	3,2,MP	2,3
5	R	4,1,MP	1,2,3
6	$P \to R$	3,5,CP	1,2
7	$(P \to Q) \to (P \to R)$	2,6,CP	1

Vi oppsummerer dette ved å skrive

$Q \to R \vdash (P \to Q) \to (P \to R)$

Bevis fra premiss(er)

1	$Q \to R$	P	1
2	$P \to Q$	P	2
3	P	P	3
4	Q	3,2,MP	2,3
5	R	4,1,MP	1,2,3
6	$P \to R$	3,5,CP	1,2
7	$(P \to Q) \to (P \to R)$	2,6,CP	1

A, B, C |– D

D kan bevises fra premissene A,B,C

$$(Q \to R) \vdash (P \to Q) \to (P \to R)$$

$$(Q \to R)\ ,\ (P \to Q) \vdash (P \to R)$$

$$(Q \to R)\ ,\ (P \to Q)\ ,\ P \vdash R$$

CP-regel gir:

Hvis

$$A1, A2, \ldots, An \vdash B,$$

så $A1, A2, \ldots, An\text{-}1 \vdash An \rightarrow B$

Tautologisk konsekvens

B er en tautologisk konsekvens av A1, A2, … An
hviss B er sann i alle valuasjoner
(linjer i sannehetsverditabellen)
der alle formlene A1, A2, … An er sanne

Skriver A1, A2, … An $\models$ B for dette

Gjelder hviss $A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An \rightarrow B$
er en tautologi, altså hviss
$\models A1 \wedge A2 \wedge \ldots \wedge An \rightarrow B$

Sunnhet, generell form:

Hvis $A1, A2, \ldots, An \vdash B$

så $A1, A2, \ldots, An \models B$

ND1800 er komplett

Hvis A er en tautologi,
så finnes et bevis for A

Hvis A er tautologi,
så $\vdash A$

Hjelperesultat

Hvis litteralene $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ "beskriver" en valuasjon som gjør A sann, da har vi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \vdash A$

Hvis litteralene $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ "beskriver" en valuasjon som gjør A gal, da har vi $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n \vdash \neg A$

Eksempel

P	R	$(P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P)$
true	true	false
true	false	true
false	true	true
false	false	false

$P, \quad R \quad \vdash \quad \neg((P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P))$

$P, \quad \neg R \quad \vdash \quad (P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P)$

$\neg P, \quad R \quad \vdash \quad (P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P)$

$\neg P, \quad \neg R \quad \vdash \quad \neg((P \rightarrow R) \rightarrow \neg (R \rightarrow P))$

Bevis for hjelperesultatet

Vi argumenterer ut fra oppbygningen av formler:

Først "Basis"

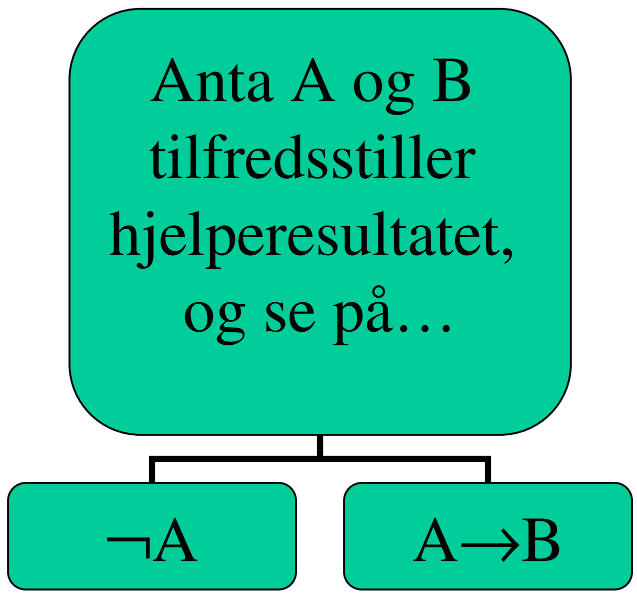
Sjekker at det gjelder for de enkleste formlene, dvs. utsagnsvariablene:

$P \vdash P \qquad \neg P \vdash \neg P \qquad R \vdash R \qquad \neg R \vdash \neg R$

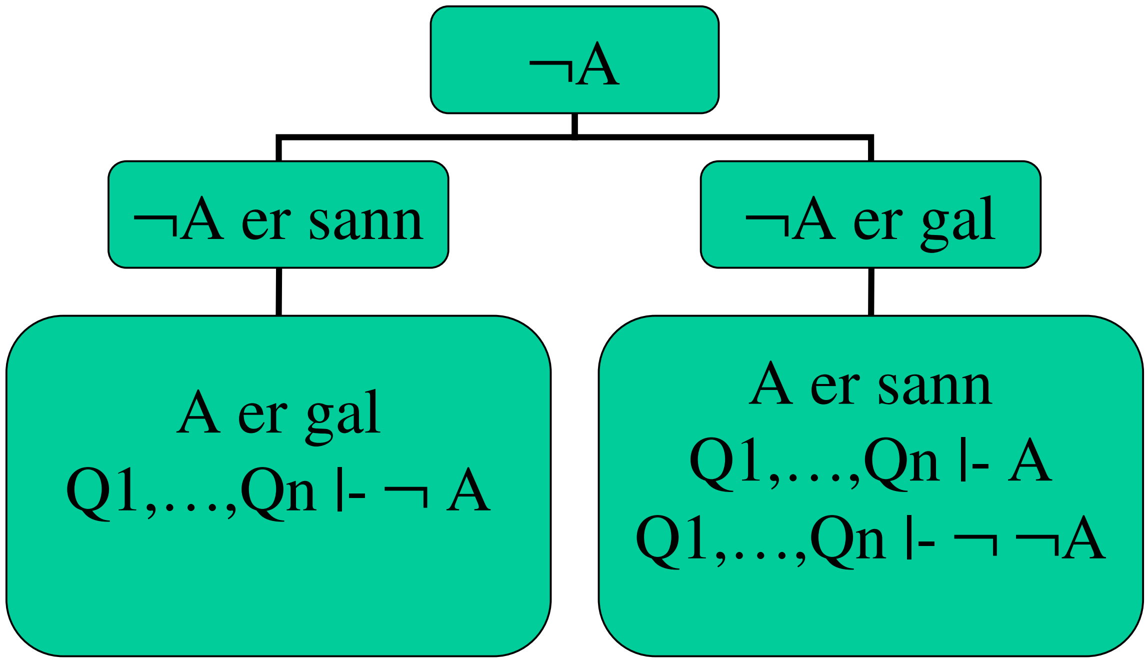
og så "Induksjon"

Sjekker at større formler "arver" dette fra de mindre formlene de er bygget opp fra.

Induksjon



$\neg A$ er enten sann eller gal i valuasjonen som Q1,…,Qn beskriver:



$\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

A→B er enten sann eller gal i valuasjonen som Q1,…,Qn beskriver:

A→B

A→B er sann

- A er gal
  Q1,…,Qn |- ¬ A
  Q1,…,Qn |- A→B
- B er sann
  Q1,…,Qn |- B
  Q1,…,Qn |- A→B

A→B er gal

- A er sann og B er gal
  Q1,…,Qn |- A
  Q1,…,Qn |- ¬B
  Q1,…,Qn |- ¬ (A→B)

|- ¬ A → (A → B)

|- B → (A → B)

|- A → (¬B → ¬(A → B)

QED (for hjelperesultatet)

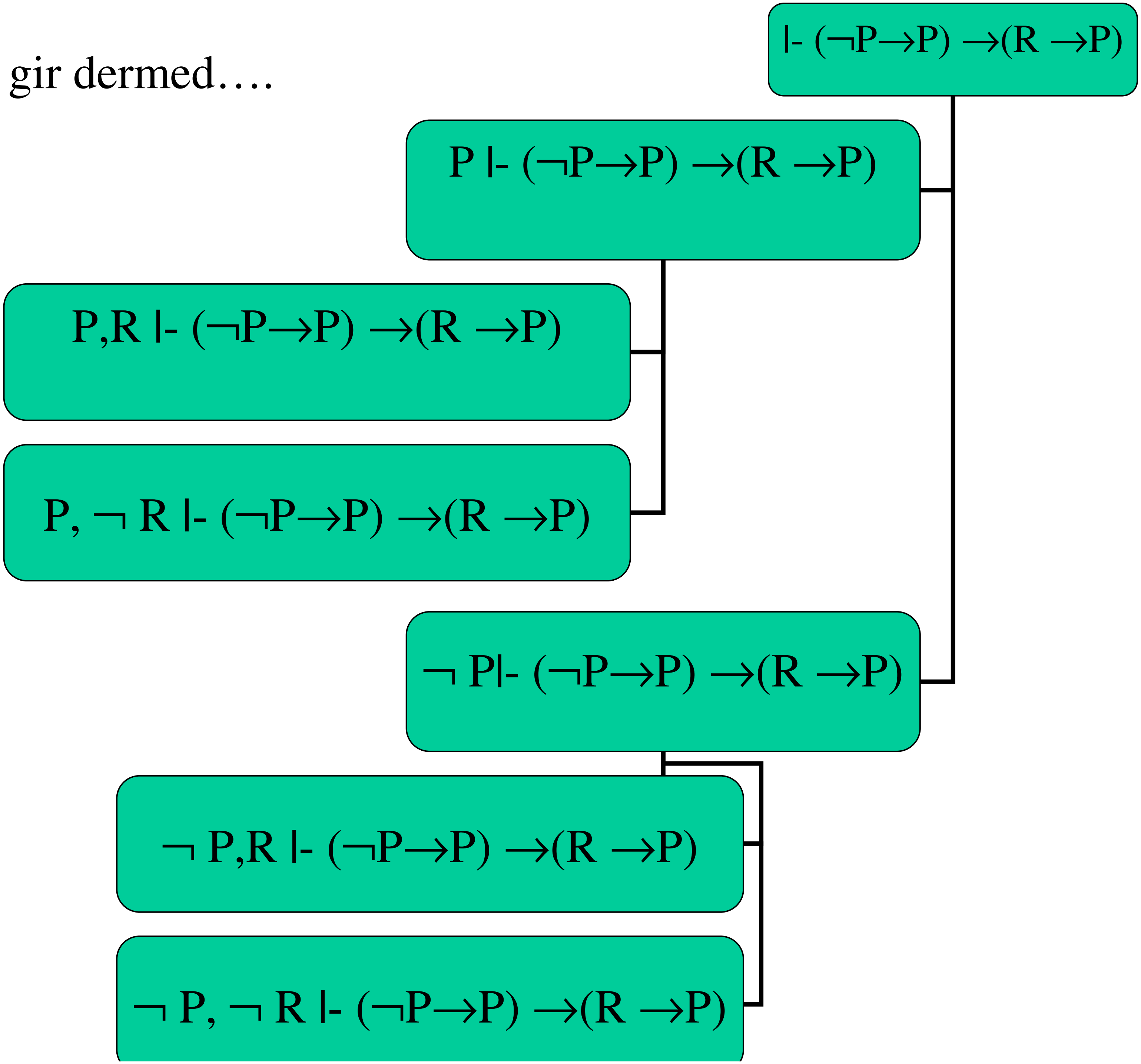
Kompletthetsteoremet følger nå ved…

- Hjelperesultatet,
- CP og MP
- $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow B))$

De to siste kombineres slik:

$Q1,\ldots Qn\text{-}1, P \vdash W$	gir ved CP	$Q1,\ldots Qn\text{-}1 \vdash P \rightarrow W$
$Q1,\ldots Qn\text{-}1, \neg P \vdash W$	gir ved CP	$Q1,\ldots Qn\text{-}1 \vdash \neg P \rightarrow W$
		$\vdash (P \rightarrow W) \rightarrow ((\neg P \rightarrow W) \rightarrow W))$
		$Q1,\ldots Qn\text{-}1 \vdash (\neg P \rightarrow W) \rightarrow W$
		$Q1,\ldots Qn\text{-}1 \vdash W$

og gir dermed….



QED (for kompletthetsteoremet)

Oppsummering

ND1800 er altså komplett fordi det inneholder CP og MP og dessuten
Inneholder nok til å gi oss..

$\vdash (A \to B) \to ((\neg A \to B) \to B))$

og dessuten teoremer som definerer/bestemmer oppførselen til konnektivene:

$\vdash A \to \neg\neg A$

$\vdash \neg A \to (A \to B)$

$\vdash B \to (A \to B)$

$\vdash A \to (\neg B \to \neg(A \to B)$

og videre…

- For konjunksjon:

|- $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$
|- $\neg A \rightarrow \neg(A \wedge B)$
|- $\neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$

- For disjunksjon:

|- $A \rightarrow (A \vee B)$
|- $B \rightarrow (A \vee B)$
|- $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg (A \vee B))$

- For true og false

|- true
|- $\neg$ false