Sekventkalkyle for utsagnslogikk

En sekvent

$$(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$$

En til

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)$$

Hva er en sekvent?

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,
- skrevet på hver sin side av symbolet $\Rightarrow$

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,
- skrevet på hver sin side av symbolet $\Rightarrow$
- $$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \; B_1, \ldots, B_m$$

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,
- skrevet på hver sin side av symbolet $\Rightarrow$
- $$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \ B_1, \ldots, B_m$$
- Sekvensen før (til venstre for) $\Rightarrow$ er antesedenten.

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,
- skrevet på hver sin side av symbolet $\Rightarrow$
- $$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \; B_1, \ldots, B_m$$
- Sekvensen før (til venstre for) $\Rightarrow$ er antesedenten.
- Sekvensen etter (til høyre for) $\Rightarrow$ er suksedenten.

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,
- skrevet på hver sin side av symbolet $\Rightarrow$
- $$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$$
- Sekvensen før (til venstre for) $\Rightarrow$ er antesedenten.
- Sekvensen etter (til høyre for) $\Rightarrow$ er suksedenten.
- Både antesedenten og suksedenten kan være tomme

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,
- skrevet på hver sin side av symbolet $\Rightarrow$
- $$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \; B_1, \ldots, B_m$$
- Sekvensen før (til venstre for) $\Rightarrow$ er antesedenten.
- Sekvensen etter (til høyre for) $\Rightarrow$ er suksedenten.
- Både antesedenten og suksedenten kan være tomme :
- Tom antesedent: $\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,
- skrevet på hver sin side av symbolet $\Rightarrow$
- $$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \; B_1, \ldots, B_m$$
- Sekvensen før (til venstre for) $\Rightarrow$ er antesedenten.
- Sekvensen etter (til høyre for) $\Rightarrow$ er suksedenten.
- Både antesedenten og suksedenten kan være tomme :
- Tom antesedent: $\quad \Rightarrow B_1, \ldots, B_m$
- Tom suksedent: $\quad A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,
- skrevet på hver sin side av symbolet $\Rightarrow$
- $$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \; B_1, \ldots, B_m$$
- Sekvensen før (til venstre for) $\Rightarrow$ er antesedenten.
- Sekvensen etter (til høyre for) $\Rightarrow$ er suksedenten.
- Både antesedenten og suksedenten kan være tomme :
- Tom antesedent: $\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$
- Tom suksedent: $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$
- Begge tomme: $\Rightarrow$

Hva er en sekvent?

- En sekvent består av to sekvenser av formler,
- skrevet på hver sin side av symbolet $\Rightarrow$
- $$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \; B_1, \ldots, B_m$$
- Sekvensen før (til venstre for) $\Rightarrow$ er antesedenten.
- Sekvensen etter (til høyre for) $\Rightarrow$ er suksedenten.
- Både antesedenten og suksedenten kan være tomme :
- Tom antesedent: $\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$
- Tom suksedent: $A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$
- Begge tomme: $\Rightarrow$

Hva er en gyldig sekvent?

Hva er en gyldig sekvent?

En sekvent er gyldig hviss det ikke fins noen valuasjon som gjør alle formlene i antesedenten sanne og alle i suksedenten gale.

Hva er en gyldig sekvent?

En sekvent er gyldig hviss det ikke fins noen valuasjon som gjør alle formlene i antesedenten sanne og alle i suksedenten gale.

Altså:

Hva er en gyldig sekvent?

En sekvent er gyldig hviss det ikke fins noen valuasjon som gjør alle formlene i antesedenten sanne og alle i suksedenten gale.

Altså:

$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \; B_1, \ldots, B_m \text{ er gyldig}$$

Hva er en gyldig sekvent?

En sekvent er gyldig hviss det ikke fins noen valuasjon som gjør alle formlene i antesedenten sanne og alle i suksedenten gale.

Altså:

$$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow\ B_1, \ldots, B_m \text{ er gyldig}$$

hviss $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_m$ er en kontradiksjon

Hva er en gyldig sekvent?

En sekvent er gyldig hviss det ikke fins noen valuasjon som gjør alle formlene i antesedenten sanne og alle i suksedenten gale.

Altså:

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow\ B_1, \ldots, B_m$ er gyldig

hviss $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_m$ er en kontradiksjon

hviss $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi

Hva er en gyldig sekvent?

En sekvent er gyldig hviss det ikke fins noen valuasjon som gjør alle formlene i antesedenten sanne og alle i suksedenten gale.

Altså:

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \; B_1, \ldots, B_m$ er gyldig

hviss $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_m$ er en kontradiksjon

hviss $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi

hviss $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi

Hva er en gyldig sekvent?

En sekvent er gyldig hviss det ikke fins noen valuasjon som gjør alle formlene i antesedenten sanne og alle i suksedenten gale.

Altså:

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow \; B_1, \ldots, B_m$ er gyldig

hviss $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B_1 \wedge \ldots \wedge \neg B_m$ er en kontradiksjon

hviss $\neg A_1 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi

hviss $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \rightarrow B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi

hviss $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologisk konsekvens av $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$.

Og spesielt

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?)

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?) $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?) $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

$\Rightarrow B$ er gyldig hviss B er en tautologi.

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?) $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

$\Rightarrow B$ er gyldig hviss B er en tautologi.

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ er gyldig hviss

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?) $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

$\Rightarrow B$ er gyldig hviss B er en tautologi.

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ er gyldig hviss (?)

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?) $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

$\Rightarrow B$ er gyldig hviss B er en tautologi.

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ er gyldig hviss (?) $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ er en kontradiksjon.

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?) $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

$\Rightarrow B$ er gyldig hviss B er en tautologi.

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ er gyldig hviss (?) $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ er en kontradiksjon.

$A \Rightarrow$ er gyldig hviss A er en kontradiksjon.

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?) $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

$\Rightarrow B$ er gyldig hviss B er en tautologi.

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ er gyldig hviss (?) $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ er en kontradiksjon.

$A \Rightarrow$ er gyldig hviss A er en kontradiksjon.

$\Rightarrow$ er

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?) $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

$\Rightarrow B$ er gyldig hviss B er en tautologi.

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ er gyldig hviss (?) $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ er en kontradiksjon.

$A \Rightarrow$ er gyldig hviss A er en kontradiksjon.

$\Rightarrow$ er (?)

Og spesielt

$\Rightarrow B_1, \ldots, B_m$ er gyldig hviss (?) $B_1 \vee \ldots \vee B_m$ er en tautologi.

$\Rightarrow B$ er gyldig hviss B er en tautologi.

$A_1, \ldots, A_n \Rightarrow$ er gyldig hviss (?) $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n$ er en kontradiksjon.

$A \Rightarrow$ er gyldig hviss A er en kontradiksjon.

$\Rightarrow$ er (?) ikke gyldig.

Eksempel 1

Eksempel 1

$$(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R)$$

Eksempel 1

$$(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R) \quad \text{er gyldig}$$

Eksempel 1

$$(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R) \ \text{ er gyldig}$$

fordi

Eksempel 1

$$(P \rightarrow Q), (Q \rightarrow R) \Rightarrow (P \rightarrow R) \;\; \text{er gyldig}$$

fordi

$$(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$$

Eksempel 1

$$(P \to Q), (Q \to R) \Rightarrow (P \to R) \text{ er gyldig}$$

fordi

$$(P \to Q) \land (Q \to R) \to (P \to R) \text{ er en tautologi.}$$

Eksempel 2

Eksempel 2

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)$$

Eksempel 2

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V) \quad \text{er gyldig}$$

Eksempel 2

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V) \quad \text{er gyldig}$$

fordi

Eksempel 2

$$(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V) \quad \text{er gyldig}$$

fordi

$$(P \to (Q \lor R)) \land (P \land V) \to (Q \land V) \lor (R \land V)$$

Eksempel 2

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V) \quad \text{er gyldig}$$

fordi

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V) \quad \text{er en tautologi}$$

Bevis

Vi beviser sekventer

Bevis

Vi beviser sekventer

- fra aksiomer

Bevis

Vi beviser sekventer

- fra aksiomer
- ved hjelp av regler

Bevis

Vi beviser sekventer

- fra aksiomer
- ved hjelp av regler
- akkurat som i for eksempel ND1800,

Bevis

Vi beviser sekventer

- fra aksiomer
- ved hjelp av regler
- akkurat som i for eksempel ND1800, forskjellen er bare

Bevis

Vi beviser sekventer

- fra aksiomer
- ved hjelp av regler
- akkurat som i for eksempel ND1800, forskjellen er bare. . .

Bevis

Vi beviser sekventer

- fra aksiomer
- ved hjelp av regler
- akkurat som i for eksempel ND1800, forskjellen er bare. . .at

Bevis

Vi beviser sekventer

- fra aksiomer
- ved hjelp av regler
- akkurat som i for eksempel ND1800, forskjellen er bare. . . at
- aksiomene nå er sekventer, og

Bevis

Vi beviser sekventer

- fra aksiomer
- ved hjelp av regler
- akkurat som i for eksempel ND1800, forskjellen er bare. . .at
- aksiomene nå er sekventer, og
- reglene lar oss avlede sekventer fra sekventer

Aksiomer

Aksiomer

En sekvent er et aksiom hviss antesedenten og suksedenten har en felles formel.

Aksiomer

En sekvent er et aksiom hviss antesedenten og suksedenten har en felles formel.

Eksempler:

- $R, P, V \Rightarrow Q, R$

Aksiomer

En sekvent er et aksiom hviss antesedenten og suksedenten har en felles formel.

Eksempler:

- $R, P, V \Rightarrow Q, R$
- $Q, P, V \Rightarrow Q, R$

Aksiomer

En sekvent er et aksiom hvis antesedenten og suksedenten har en felles formel.

Eksempler:

- $R, P, V \Rightarrow Q, R$
- $Q, P, V \Rightarrow Q, R$
- $P, V \Rightarrow Q, R, P$

Aksiomer

En sekvent er et aksiom hviss antesedenten og suksedenten har en felles formel.

Eksempler:

- $R, P, V \Rightarrow Q, R$
- $Q, P, V \Rightarrow Q, R$
- $P, V \Rightarrow Q, R, P$
- $(P \to (Q \vee R)), P, V \Rightarrow V, R$

Aksiomer

En sekvent er et aksiom hviss antesedenten og suksedenten har en felles formel.

Eksempler:

- $R, P, V \Rightarrow Q, R$
- $Q, P, V \Rightarrow Q, R$
- $P, V \Rightarrow Q, R, P$
- $(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow V, R$
- $(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), V$

Aksiomer

En sekvent er et aksiom hviss antesedenten og suksedenten har en felles formel.

Eksempler:

- $R, P, V \Rightarrow Q, R$
- $Q, P, V \Rightarrow Q, R$
- $P, V \Rightarrow Q, R, P$
- $(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow V, R$
- $(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), V$
- $(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (P \wedge V), (R \wedge V)$

Regler

Regler

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi}$$

Regler

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi}$$

Regler

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \Rightarrow \Pi}$$

Regler

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Pi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Pi}$$

Regler

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Pi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi}$$

Regler

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Pi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Pi}$$

Regler

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Pi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Delta \Rightarrow \Pi}$$

Regler

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Pi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Pi}$$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$$Q, P, V \Rightarrow Q, R$$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$Q, P, V \Rightarrow Q, R$ $\qquad$ $R, P, V \Rightarrow Q, R$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$$\frac{Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R}{(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R}\; V\lor$$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$$\dfrac{Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R}{(Q \vee R), P, V \Rightarrow Q, R}\ {\color{red}V\vee}$$

$$P, V \Rightarrow Q, R, P$$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$$\dfrac{\dfrac{Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R}{(Q \vee R), P, V \Rightarrow Q, R}\ {\color{red}V\vee} \qquad P, V \Rightarrow Q, R, P}{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow Q, R}\ {\color{red}V \rightarrow}$$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$$\dfrac{\dfrac{Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R}{(Q \vee R), P, V \Rightarrow Q, R}\,{\color{red}V\vee} \qquad P, V \Rightarrow Q, R, P}{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow Q, R}\,{\color{red}V\rightarrow}$$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow V, R$$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R}{(Q \vee R), P, V \Rightarrow Q, R}\,V\vee
    \qquad P, V \Rightarrow Q, R, P
  }{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow Q, R}\,V\rightarrow
  \qquad (P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow V, R
}{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), R}\,H\wedge
$$

$$Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad\qquad R, P, V \Rightarrow Q, R$$

$$V\lor$$

$$(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R \qquad\qquad P, V \Rightarrow Q, R, P$$

$$V \rightarrow$$

$$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow Q, R \qquad\qquad (P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow V, R$$

$$H\land$$

$$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R \qquad (P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), V$$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$$\dfrac{Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R}{(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R}\; V\lor$$

$$\dfrac{(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R \qquad P, V \Rightarrow Q, R, P}{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow Q, R}\; V\to$$

$$\dfrac{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow Q, R \qquad (P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow V, R}{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R}\; H\land$$

$$\dfrac{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R \qquad (P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), V}{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)}\; H\land$$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R}{(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R}\,V\lor
        \qquad P, V \Rightarrow Q, R, P
      }{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow Q, R}\,V\to
      \qquad (P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow V, R
    }{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R}\,H\land
    \qquad (P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), V
  }{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)}\,H\land
}{(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)}\,V\land
$$

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$Q, P, V \Rightarrow Q, R$}
\AxiomC{$R, P, V \Rightarrow Q, R$}
\RightLabel{$V\lor$}
\BinaryInfC{$(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R$}
\AxiomC{$P, V \Rightarrow Q, R, P$}
\RightLabel{$V\rightarrow$}
\BinaryInfC{$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow Q, R$}
\AxiomC{$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow V, R$}
\RightLabel{$H\land$}
\BinaryInfC{$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R$}
\AxiomC{$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), V$}
\RightLabel{$H\land$}
\BinaryInfC{$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$}
\RightLabel{$V\land$}
\UnaryInfC{$(P \rightarrow (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$}
\RightLabel{$H\lor$}
\UnaryInfC{$(P \rightarrow (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$}
\end{prooftree}
$$

Et bevis – fra aksiomer og frem til teorem

$$\dfrac{Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R}{(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R}\; V\lor$$

$$\dfrac{(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R \qquad P, V \Rightarrow Q, R, P}{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow Q, R}\; V\to$$

$$\dfrac{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow Q, R \qquad (P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow V, R}{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R}\; H\land$$

$$\dfrac{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R \qquad (P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), V}{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)}\; H\land$$

$$\dfrac{(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)}{(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)}\; V\land$$

$$\dfrac{(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)}{(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)}\; H\lor$$

$$\dfrac{(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)}{(P \to (Q \lor R)) \land (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)}\; V\land$$

Et bevis – fra teorem og bakover mot aksiomer

Et bevis – fra teorem og bakover mot aksiomer

$$(P \to (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$$

Et bevis – fra teorem og bakover mot aksiomer

$$(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

$$\Big| \quad {\color{red} V\land}$$

$$(P \to (Q \lor R)) \land (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

Et bevis – fra teorem og bakover mot aksiomer

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)$$

$$\Big| \; H\vee$$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$$

$$\Big| \; V\wedge$$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$$

Et bevis – fra teorem og bakover mot aksiomer

$$(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$$

$$\Big| \; V\land$$

$$(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$$

$$\Big| \; H\lor$$

$$(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

$$\Big| \; V\land$$

$$(P \to (Q \lor R)) \land (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

Et bevis – fra teorem og bakover mot aksiomer

$$(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R \qquad (P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), V$$

$$H\land$$

$$(P \to (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$$

$$V\land$$

$$(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$$

$$H\lor$$

$$(P \to (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

$$V\land$$

$$(P \to (Q \lor R)) \land (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

Et bevis – fra teorem og bakover mot aksiomer

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(P \to (Q \vee R)), P, V \Rightarrow Q, R \qquad (P \to (Q \vee R)), P, V \Rightarrow V, R}{(P \to (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), R}\,H\wedge \qquad (P \to (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), V}{(P \to (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)}\,H\wedge}{(P \to (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)}\,V\wedge}{(P \to (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)}\,H\vee}{(P \to (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)}\,V\wedge
$$

Et bevis – fra teorem og bakover mot aksiomer

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$(Q \vee R), P, V \Rightarrow Q, R$}
\AxiomC{$P, V \Rightarrow Q, R, P$}
\RightLabel{$V \rightarrow$}
\BinaryInfC{$(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow Q, R$}
\AxiomC{$(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow V, R$}
\RightLabel{$H\wedge$}
\BinaryInfC{$(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), R$}
\AxiomC{$(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), V$}
\RightLabel{$H\wedge$}
\BinaryInfC{$(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)$}
\RightLabel{$V\wedge$}
\UnaryInfC{$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)$}
\RightLabel{$H\vee$}
\UnaryInfC{$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$}
\RightLabel{$V\wedge$}
\UnaryInfC{$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$}
\end{prooftree}
$$

Et bevis – fra teorem og bakover mot aksiomer

$$Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad\qquad R, P, V \Rightarrow Q, R$$

$$V\vee$$

$$(Q \vee R), P, V \Rightarrow Q, R \qquad\qquad P, V \Rightarrow Q, R, P$$

$$V \rightarrow$$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow Q, R \qquad\qquad (P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow V, R$$

$$H\wedge$$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), R \qquad (P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), V$$

$$H\wedge$$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)$$

$$V\wedge$$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)$$

$$H\vee$$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$$

$$V\wedge$$

$$(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)$$