# Sunnhet og kompletthet av sekventkalkyle for utsagnslogikk

# Sekventkalkyle

System for å bevise sekventer

fra aksiomer

$$\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi, A, \Theta$$

ved hjelp av regler

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Pi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A \qquad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \rightarrow B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \rightarrow B), \Pi}$$

# Bevis

er oppstilling som viser hvordan nye sekventer kan avledes fra aksiomer ved hjelp av reglene i null eller flere trinn

$$\dfrac{Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R}{(Q \vee R), P, V \Rightarrow Q, R}\ {\color{red}V\vee}$$

$$\dfrac{(Q \vee R), P, V \Rightarrow Q, R \qquad P, V \Rightarrow Q, R, P}{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow Q, R}\ {\color{red}V \rightarrow}$$

$$\dfrac{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow Q, R \qquad (P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow V, R}{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), R}\ {\color{red}H\wedge}$$

$$\dfrac{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), R \qquad (P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), V}{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)}\ {\color{red}H\wedge}$$

$$\dfrac{(P \rightarrow (Q \vee R)), P, V \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)}{(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)}\ {\color{red}V\wedge}$$

$$\dfrac{(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V), (R \wedge V)}{(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)}\ {\color{red}H\vee}$$

$$\dfrac{(P \rightarrow (Q \vee R)), (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)}{(P \rightarrow (Q \vee R)) \wedge (P \wedge V) \Rightarrow (Q \wedge V) \vee (R \wedge V)}\ {\color{red}V\wedge}$$

# Teoremer

er sekventer som kan bevises på denne måten

# Sekvent er gyldig

hviss det ikke finnes noen valuasjon som gjør alle formlene til venstre sanne og alle formlene til høyre gale.

# Sekventkalkylen er sunn:

Alle teoremer er gyldige

fordi alle aksiomer er gyldige $\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi, A, \Theta$

og alle regler bevarer gyldighet

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A}{\Gamma, (\neg A), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (\neg A), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \wedge B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, \Pi \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \wedge B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \Rightarrow \Pi \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \vee B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \vee B), \Pi}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi, A \quad \Gamma, B, \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, (A \to B), \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta, B, \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, (A \to B), \Pi}$$

Gyldighet er altså en egenskap som går i arv blant teoremer.

# Gyldighet arves

$$Q, P, V \Rightarrow Q, R \qquad R, P, V \Rightarrow Q, R$$

$$V\lor$$

$$(Q \lor R), P, V \Rightarrow Q, R \qquad P, V \Rightarrow Q, R, P$$

$$V \rightarrow$$

$$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow Q, R \qquad (P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow V, R$$

$$H\land$$

$$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), R \qquad (P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), V$$

$$H\land$$

$$(P \rightarrow (Q \lor R)), P, V \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$$

$$V\land$$

$$(P \rightarrow (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V), (R \land V)$$

$$H\lor$$

$$(P \rightarrow (Q \lor R)), (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

$$V\land$$

$$(P \rightarrow (Q \lor R)) \land (P \land V) \Rightarrow (Q \land V) \lor (R \land V)$$

# Sekventkalkylen er komplett

Alle gyldige sekventer er teoremer

Systemet er sterkt nok til at alle gyldige sekventer kan bevises

# Sekventkalkylen er komplett

Fire grunner

- Alle gyldige sekventer uten konnektiver er teoremer
- Enhver sekvent med konnektiver matcher undersiden av minst en regel
- Sekventene over streken er alltid enklere (har færre konnektiver) enn sekventen under streken.
- Alle regler bevarer gyldighet også nedenfra og opp

Til sammen sikrer dette at alle gyldige sekventer kan bevises

# Sekventkalkylen er komplett

Fordi:

Kan avledes ved en regel fra enklere, gyldige sekventer

Aksiom!

Nei

Ja

Inneholder konnektiver?

Gyldig sekvent

# Sekventkalkylen er komplett

“Graderer” nå sekventene etter hvor mange (forekomster av) konnektiver de inneholder:

De enkleste inneholder ingen, og en sekvent er enklere enn en annen hviss den inneholder færre forekomster.

# Sekventkalkylen er komplett

*Bevisbarhet*

går nå i arv blant alle gyldige sekventer:

- Alle gyldige sekventer uten konnektiver er bevisbare, og
- Gyldige sekventer med konnektiver arver bevisbarhet fra enklere, gyldige sekventer.

# Første ordens predikatlogikk

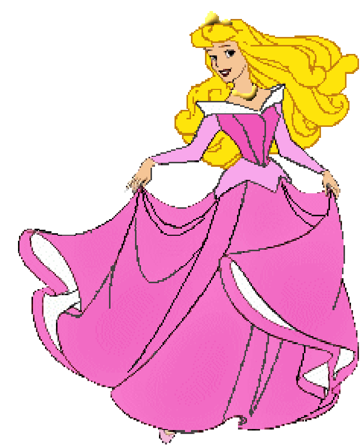
Kermit kysser Askepott

# Første ordens predikatlogikk

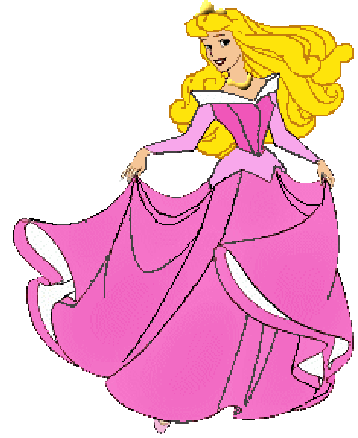
relasjonssymbol
predikatsymbol

Kysser(kermit,askepott)

individkonstanter

$$\text{kysser(kermit,askepott)} \wedge \text{danser(snehvit)} \wedge \text{danser(aurora)}$$

danser(askepott) $\wedge$ danser(snehvit) $\wedge$ danser(aurora) $\wedge$ danser(jasmin)

Kvantor/kvantifikator

$\forall x$ danser(x)

De to formlene betyr det samme når domenet består av disse fire

$\forall x\ (\text{prinsesse}(x) \rightarrow \text{danser}(x))$

$\exists x\ \text{hamrer}(x)$

$\exists x\ (\text{and}(x) \wedge \text{hamrer}(x))$

$\neg\ \exists x\ (\text{prinsesse}(x) \wedge \text{hamrer}(x))$

# Ingredienser i første ordens predikatlogikk

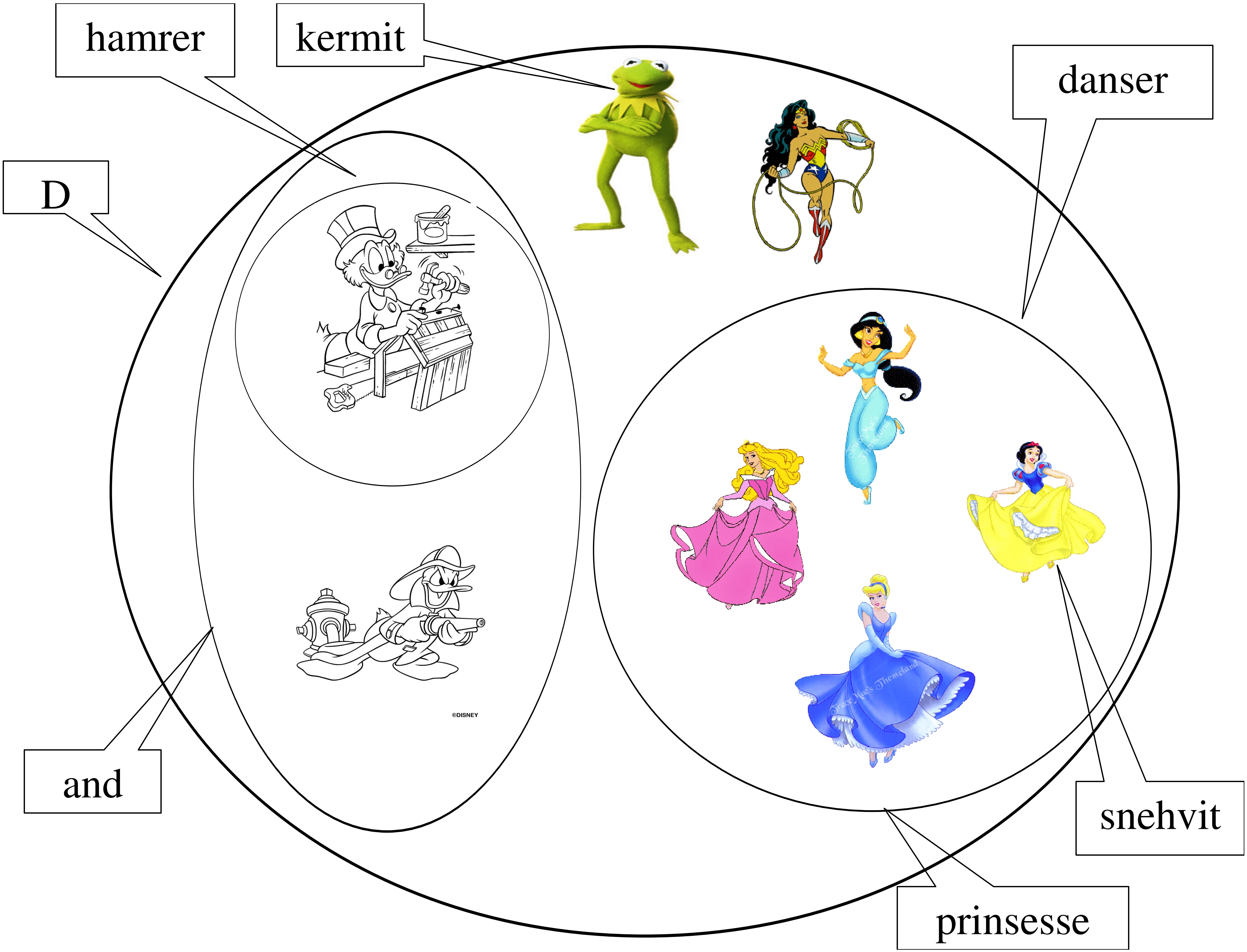
- (Individ)variabler: x,y,z,..
- (Individ)konstanter: a,b,c,… (kermit, askepott,..)
- Funksjonssymboler/Function constants: f,g,h,…
- Relasjonssymboler/Predicate constants: p,q,r,… (prinsesse, danser, kysser,..)
- Konnektiver $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ (evt. true, false)
- Kvantorer $\forall$, $\exists$
- Parenteser ), (

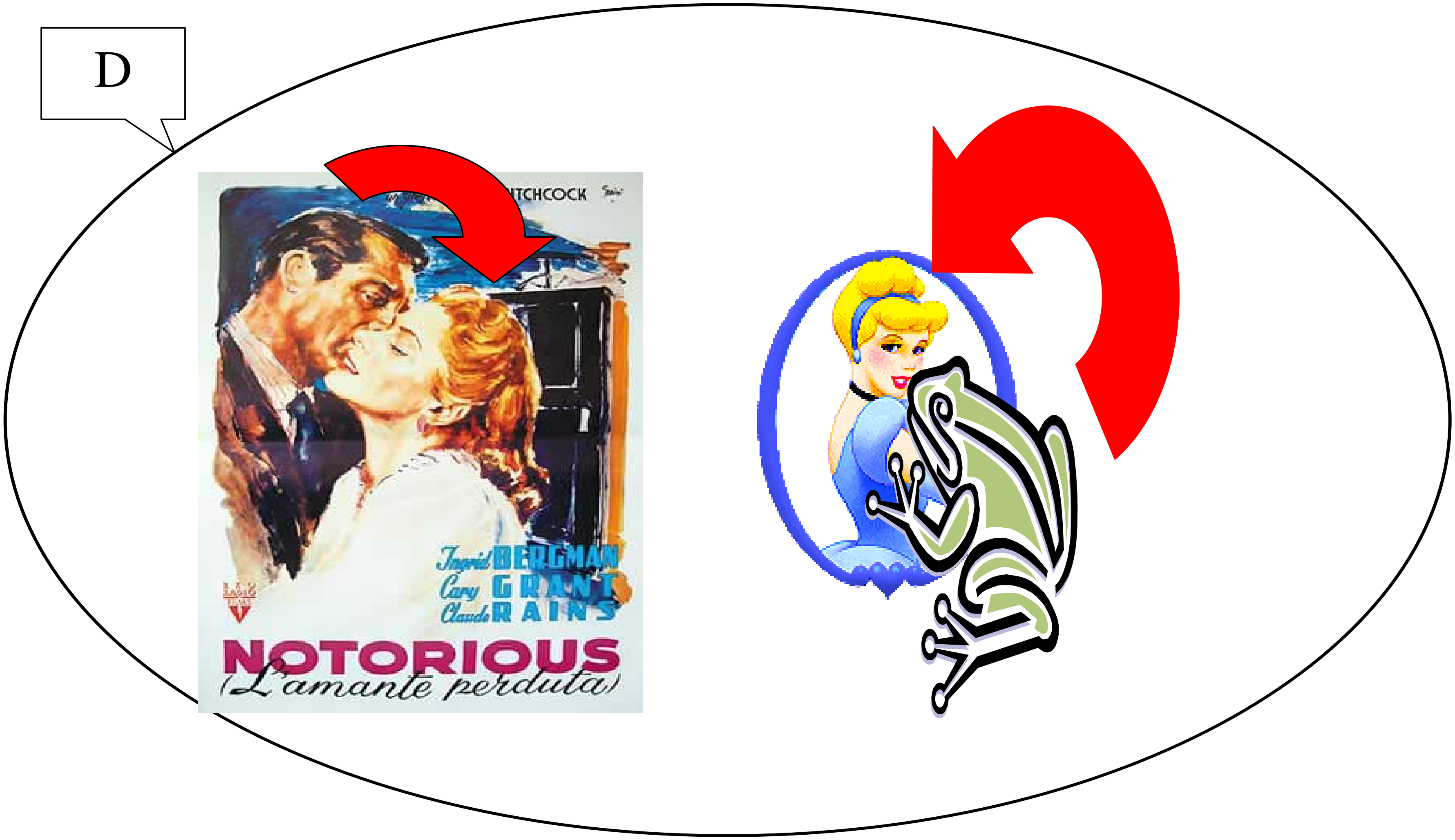
Regler for hvordan disse kan kombineres til velformete formler…
Kommer tilbake til dette…

# En tolkning/interpretation består av

- Et domene: en ikke-tom mengde D
- Et element ("individ") i domenet D for hver individkonstant
- Et element ("individ") i domenet D for hver individvariabel
- En (n-ær) relasjon over D for hvert (n-ært) relasjonssymbol
- En (n-ær) funksjon over D for hvert (n-ært) funksjonssymbol

- Spesielt:  Hver unær relasjon tolkes som en delmengde av D


hamrer
kermit
danser
D
and
prinsesse
snehvit
©DISNEY




kysser(cary,ingrid) $\wedge$ kysser(kermit,askepott)

Det binære relasjons-symbolet kysser tolkes som en binær relasjon på D

$$\forall x(\text{prinsesse}(x) \rightarrow \exists y\ (\text{frosk}(y) \wedge \text{kysser}(y,x))$$

$$\neg\forall y(\text{frosk}(y) \rightarrow \exists x\ (\text{prinsesse}(x) \wedge \text{kysser}(y,x))$$

# Mini-sudoku

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 3 |

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 3 |

Diagrammet viser en ternær relasjon mellom tall:

R(2,3,1) betyr at ruten i kolonne 2 og rad 3 inneholder 1.

R(3,2,2) betyr at ruten i kolonne 3 og rad 2 inneholder 2.

R(1,1,3) betyr at ruten i kolonne 1 og rad 1 inneholder 3.

Snakker om tallene 1,2,3:

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 2 | 1 |
| 2 | 1 | 3 | 2 |
| 3 | 2 | 1 | 3 |

For hvert tall:  Hver kolonne inneholder en rute med det tallet, altså:

For hvert tall x : for hver kolonne  y  : finnes rad  z  slik at
tallet  x står i ruten felles for kolonnen y  og raden  z

$\forall x \forall y \exists z \, R(y,z,x)$

For hvert tall:  Hver rad inneholder en rute med det tallet, altså:

For hvert tall x : for hver rad  z  : finnes kolonne  y  slik at
tallet  x står i ruten felles for kolonnen y  og raden  z

$\forall x \forall z \exists y \, R(y,z,x)$

# Forhold mellom variabler og kvantifikatorer: Frie og bundne variabler. Skop.

Enhver frosk kysser en prinsesse som alle riddere elsker

$$\forall x(F(x) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(x,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))))$$

$$\forall x\,(F(x) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(x,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))))$$

Hver kvantor har en rekkevidde/***skop.***

Dette er den delen av formelen som den virker på.

Kvantorer ***binder*** forekomster av variabler i sitt skop, men ikke alle:

En forekomst av en variabel kan stå i skopet til flere kvantorer, men er bare bundet av en av dem, nærmere bestemt av den med rett variabel som har minst skop. (x i $\forall x$ er også bundet av $\forall x$ .)

Variabelforekomster som ikke er bundet, er ***frie***.

$$\forall x \, (F(x) \rightarrow \exists y \, (P(y) \land K(x,y) \land \forall x \, (R(x) \rightarrow E(x,y))))$$

$$\forall x \, (F(x) \rightarrow \exists y \, (P(y) \land K(x,y) \land \forall z \, (R(z) \rightarrow E(z,y))))$$

# Substitusjon

- A(x/a) er resultatet av å sette inn a for alle frie forekomster av x i A.

$$(F(x) \to \exists y\, (P(y) \wedge K(x,y) \wedge \forall x\, (R(x) \to E(x,y)))) \ (x/a)$$

$$= (F(a) \to \exists y\, (P(y) \wedge K(a,y) \wedge \forall x\, (R(x) \to E(x,y))))$$

# Sannhet av formler defineres i forhold til tolkninger.

$\forall$x A er sann i tolkningen I med domenet D

hviss

A(x/a) er sann (i I) for alle a i D.

$\exists$x A er sann i tolkningen I med domenet D

hviss

A(x/a) er sann (i I) for en a i D.

$$I \models A$$

I gjør A sann

A er sann i tolkningen I

# Når I er tolkning med domene D:

$$I \models \forall x\, A$$

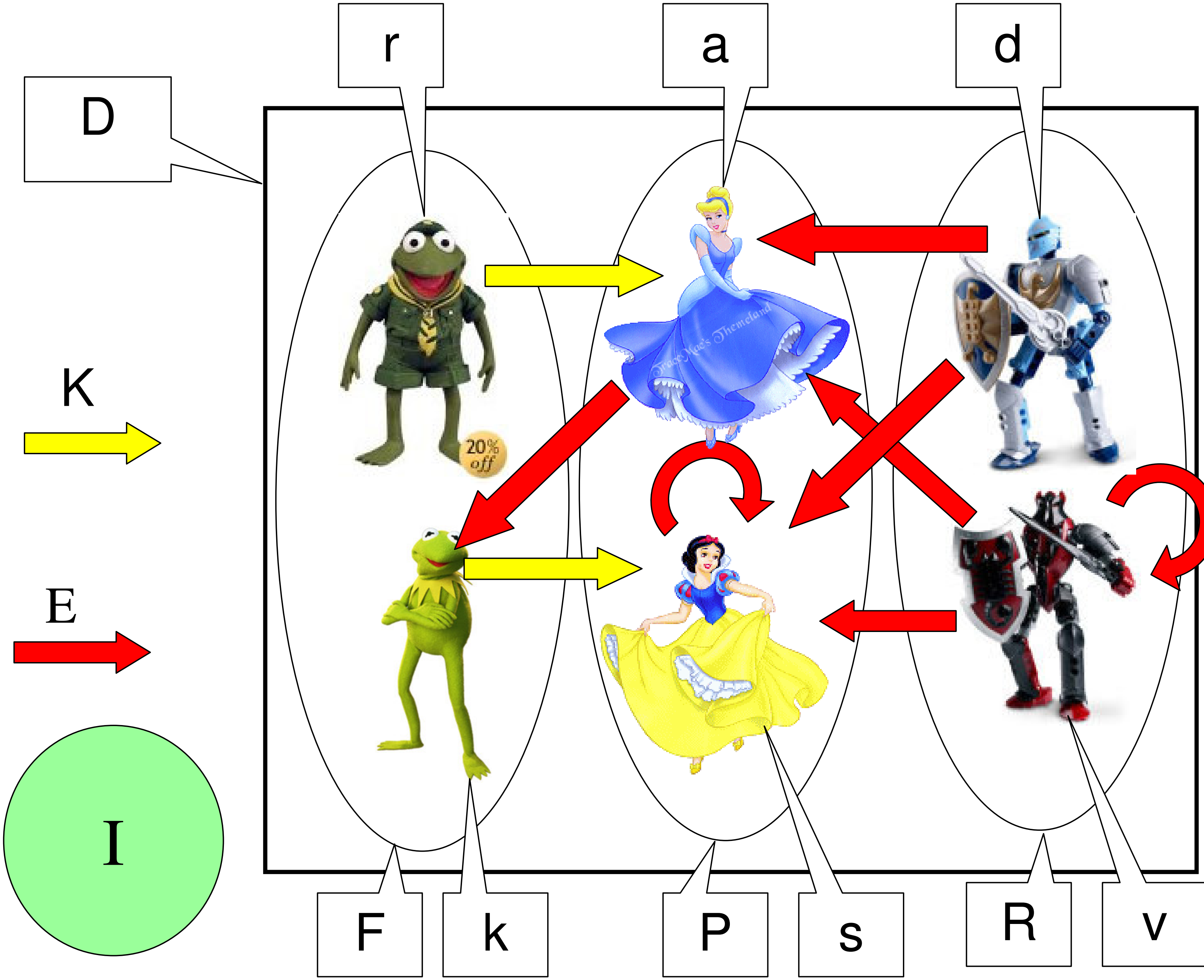
hviss

$I \models A(x/a)$ for alle $a$ i $D$

$$I \models \exists x\, A$$

hviss

$I \models A(x/a)$ for (minst) en $a$ i $D$



r
a
d
D
K
E
I
F
k
P
s
R
v

$$I \models \forall x\,(F(x) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(x,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y))))$$

hviss

$$I \models F(r) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(r,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y)))$$ og

$$I \models F(a) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(a,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y)))$$ og

$$I \models F(d) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(d,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y)))$$ og

$$I \models F(k) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(k,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y)))$$ og

$$I \models F(s) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(s,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y)))$$ og

$$I \models F(v) \rightarrow \exists y\,(P(y) \wedge K(v,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y)))$$

$$I \models \exists y\,(P(y) \wedge K(r,y) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,y)))$$

hviss

$I \models P(r) \wedge K(r,r) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,r))$ eller

$I \models P(a) \wedge K(r,a) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,a))$ eller

$I \models P(d) \wedge K(r,d) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,d))$ eller

$I \models P(k) \wedge K(r,k) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,k))$ eller

$I \models P(s) \wedge K(r,s) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,s))$ eller

$I \models P(v) \wedge K(r,v) \wedge \forall x\,(R(x) \rightarrow E(x,v))$

$$I \models \forall x\, (R(x) \to E(x,a))$$

hviss

$I \models R(r) \to E(r,a)$ og

$I \models R(a) \to E(a,a)$ og

$I \models R(d) \to E(d,a)$ og

$I \models R(k) \to E(k,a)$ og

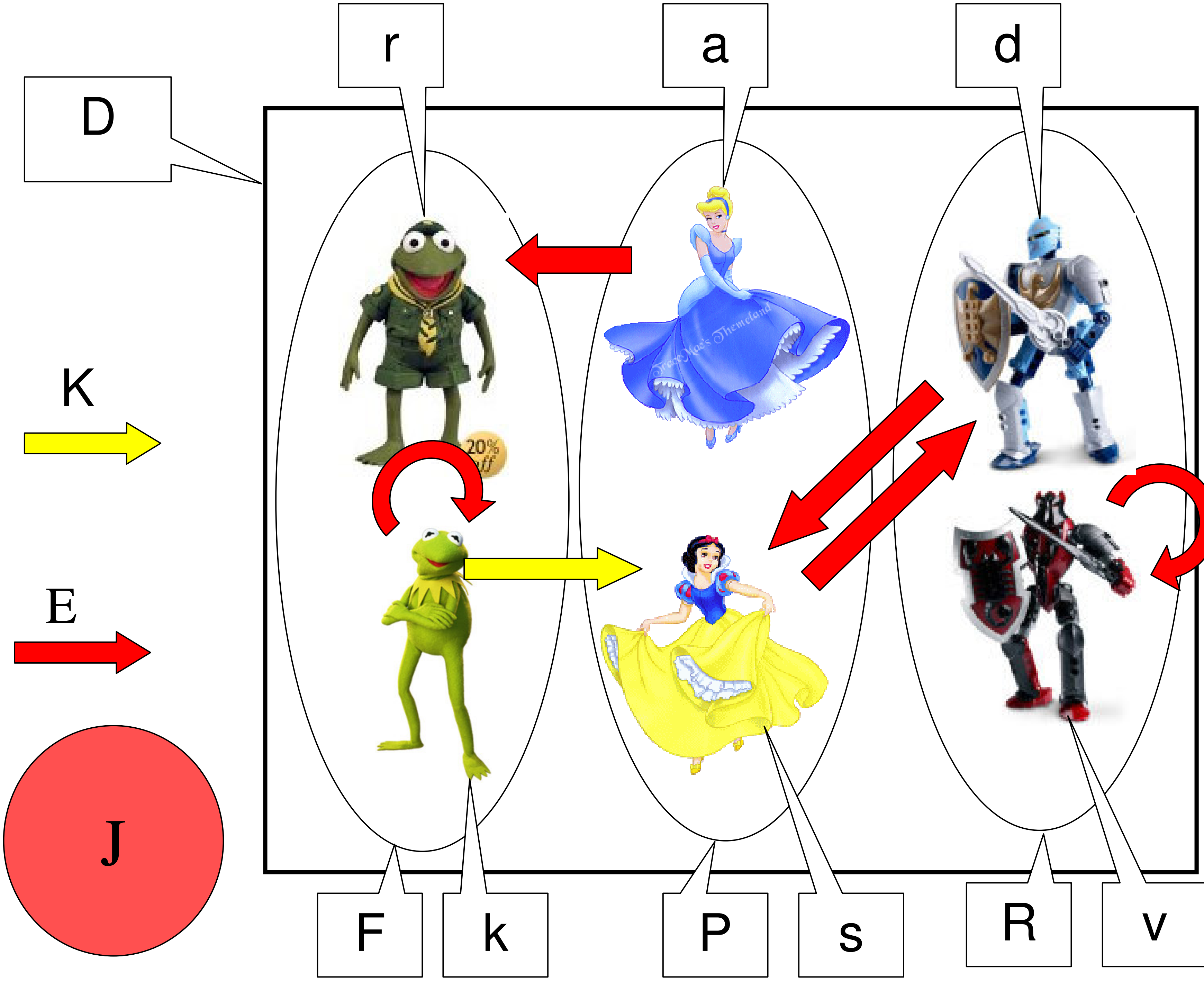
$I \models R(s) \to E(s,a)$ og

$I \models R(v) \to E(v,a)$

# Modell/motmodell

- Hvis A er sann i en tolkning, sier vi at tolkningen er en ***modell*** for A.

- Hvis A er gal i en tolkning, sier vi at tolkningen er en ***motmodell*** for A.


r
a
d
D
K
E
J
F
k
P
s
R
v