Mer om predikatlogikk

- Formalisering av norske setninger i første ordens predikatlogikk
- Funksjonssymboler
- Syntaks
- Gyldighet
- Noen gyldige formler
- Tillukninger

(Individid)konstanter: dagros, litago

Unære relasjonssymboler: ku, kd, d, veg

Binære relasjonssymboler: spise

- Kyr er klovdyr — $\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$
- Klovdyr er dyr — $\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$
- Klovdyr er vegetarianere — $\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$
- Vegetarianere spiser ikke dyr — $\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge spise(x,y)))$
- Dagros og Litago er kyr — $ku(dagros) \wedge ku(litago)$

- Dagros spiser ikke Litago — $\neg\ spise(dagros, litago)$

– Kyr er klovdyr

– Klovdyr er dyr

– Klovdyr er vegetarianere

– Vegetarianere spiser ikke dyr

– Dagros og Litago er kyr

– Et dyrs venstre bakbein er en del av dyret

–Hvis noen spiser en del av et dyr, så spiser de dyret

–Dagros spiser ikke Litagos venstre bakbein

Binært relasjonssymbol del_av (del_av(x,y) : x er en del av y)

Unært funksjonssymbol vb ??

$\forall x \, (\text{dyr}(x) \rightarrow \text{del\_av}(\text{vb}(x),x))$

$\forall x \, \forall y \, \forall z \, (\text{spise}\,(x,y) \wedge \text{del\_av}(y,z) \wedge \text{dyr}(z) \rightarrow \text{spise}(x,z))$

$\neg \, \text{spise}\,(\text{dagros}, \text{vb}(\text{litago}))$

–Et dyrs venstre bakbein er en del av dyret

–Hvis noen spiser en del av et dyr, så spiser de dyret

–Dagros spiser ikke Litagos venstre bakbein

Termer

- Alle individvariabler er termer
- Alle individkonstanter er termer
- Hvis t1 og … og tn er termer og f er et n-ært funksjonssymbol, da er f(t1, … , tn) en term.

Formler

- True og false er formler
- Hvis t1 og … og tn er termer og r er et n-ært relasjonssymbol, så er r(t1, …, tn) en formel
- Hvis A og B er formler, så er (A) og $\neg$ A og A $\wedge$ B og A $\vee$ B og A $\rightarrow$ B formler
- Hvis x er en variabel og A er en formel, så er $\exists$x A og $\forall$x A formler.

Presedensregler

- $\exists x$ og $\forall x$ binder like sterkt som $\neg$

$$\exists x\ ku(x) \wedge spiser(y,x) \wedge \forall z \neg spiser(y,x) \rightarrow spiser(z,x)$$

kan bare tolkes som

$$((\exists x\ ku(x)) \wedge spiser(y,x) \wedge (\forall z\ (\neg spiser(y,x)))) \rightarrow spiser(z,x)$$

Gyldig formel (Valid wwf)

- Vanligvis er en formel sann i noen tolkninger og gal i noen tolkninger, men noen formler er gyldige; det vil si at de er sanne i alle tolkninger.

- En formel er altså gyldig hviss den ikke har noen motmodell

- Eksempler er alle tautologier, men vi har mer.

Noen gyldige formler

$$\forall x\, \neg A \rightarrow \neg \exists x\, A$$

$$\exists x\, \neg A \rightarrow \neg \forall x\, A$$

$$\forall x\, (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x\, A \rightarrow \forall x\, B)$$

$$\forall x\, A \wedge \forall x\, B \rightarrow \forall x\, (A \wedge B)$$

$$\exists x\, (A \vee B) \rightarrow \exists x\, A \vee \exists x\, B$$

$$\forall x\, \forall y\, A \rightarrow \forall y\, \forall x\, A$$

$$\exists x\, \forall y\, A \rightarrow \forall y\, \exists x\, A$$

Oppfyllbar (satisfiable) formel

- En formel oppfyllbar hviss den er sann i minst en tolkning.

- En formel er altså oppfyllbar hviss den har en modell

Åpen formel

- Formler med frie variabler kalles **åpne**.
- Åpne formler er vanskelige å tolke som klare påstander – deres betydning er ennå "åpen". De tolkes lettere som mengder/relasjoner, for eksempel mengden av dem som kysser prinsesser:
  $\exists y\ (\text{Prinsesse}(y) \land \text{Kysser}(x,y))$
- Åpne formler regnes ofte som "annenrangs" eller et nødvendig onde; prøv for eksempel å mate en formel med frie variabler til denne teorembeviseren. (Du får feilmelding!)

Lukket formel

- En lukket formel er en formel uten frie variabler.

- Vi har to viktige måter å lukke formler på, det vil si måter å gjøre åpne formler om til lukkete formler.

- Dette er universell og eksistensiell tillukning.

$\exists x \exists y \exists z\,(\mathrm{Prinsesse}(z) \wedge \mathrm{Elsker}(x,z) \wedge \mathrm{Elsker}(y,z))$

Eksistensiell tillukning

$\exists z\,(\mathrm{Prinsesse}(z) \wedge \mathrm{Elsker}(x,z) \wedge \mathrm{Elsker}(y,z))$

Universiell tillukning

$\forall x \forall y \exists z\,(\mathrm{Prinsesse}(z) \wedge \mathrm{Elsker}(x,z) \wedge \mathrm{Elsker}(y,z))$

En formel er gyldig hviss dens universelle tillukning er det.

En formel er oppfyllbar hviss dens eksistensielle tillukning er det.