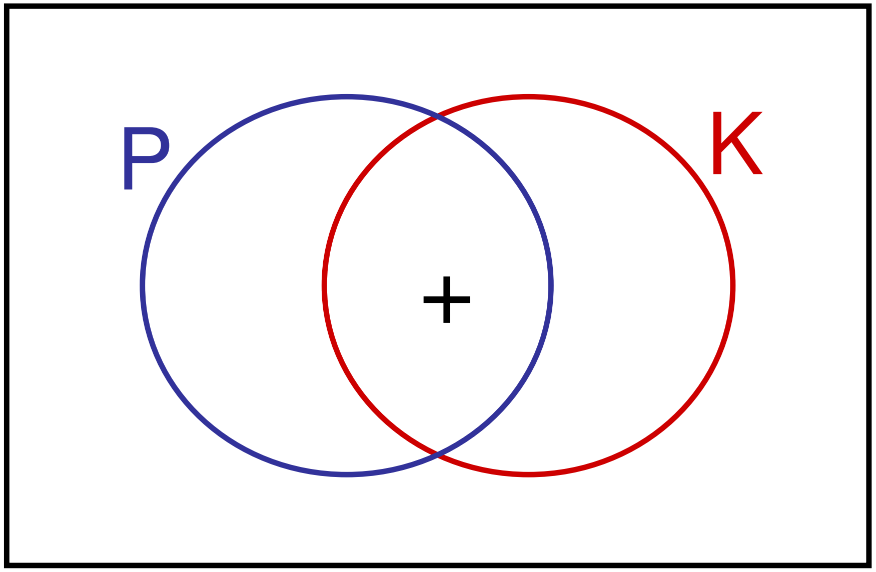
Oversettelse / Formalisering

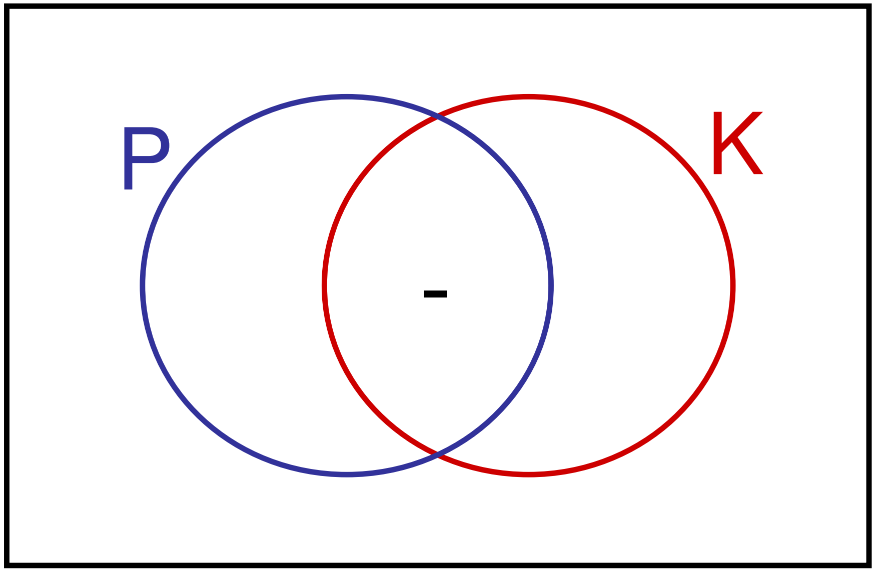


$\exists x\,(P(x) \wedge K(x))$

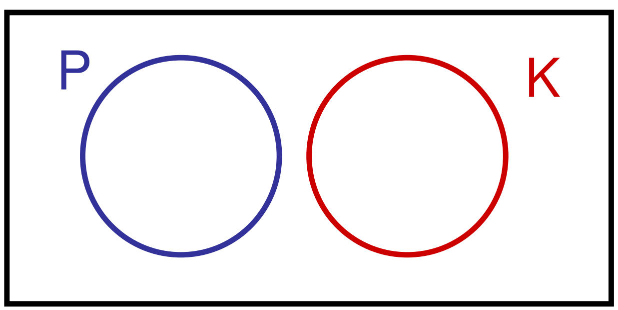
Noen politikere er korrupte.

Det fins en korrupt politiker.

En politiker er korrupt.

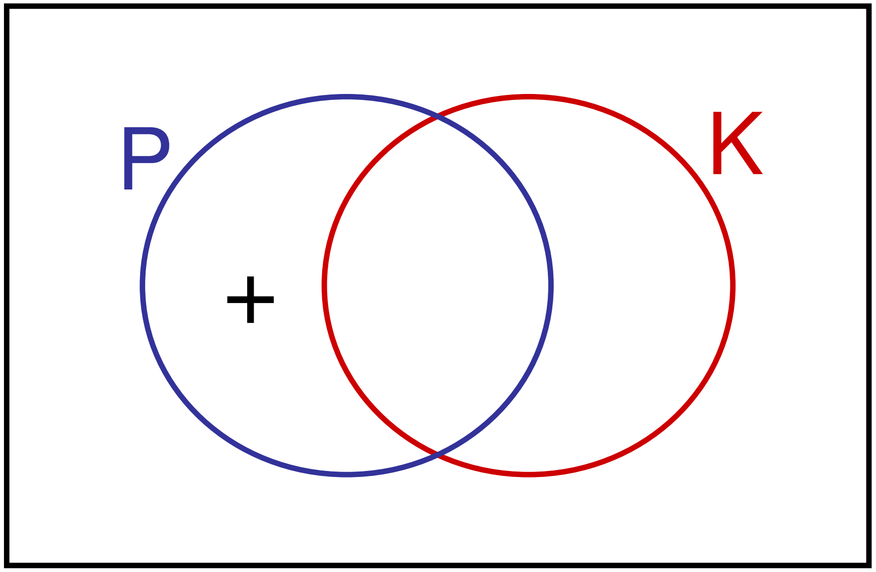


$$\neg\exists x\,(P(x) \wedge K(x))$$
$$\forall x\,\neg(P(x) \wedge K(x))$$
$$\forall x\,(\neg P(x) \vee \neg K(x))$$
$$\forall x\,(P(x) \rightarrow \neg K(x))$$



Ingen politikere er korrupte.

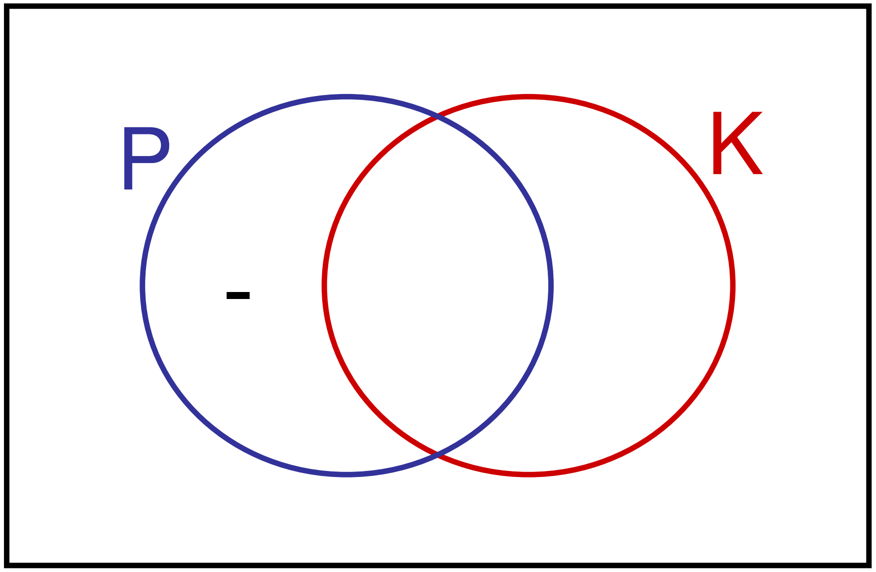
Det fins ingen korrupt politiker.



$\exists x\,(P(x) \wedge \neg K(x))$

Noen politikere er ikke korrupte.

Det fins en politiker som ikke er korrupt.

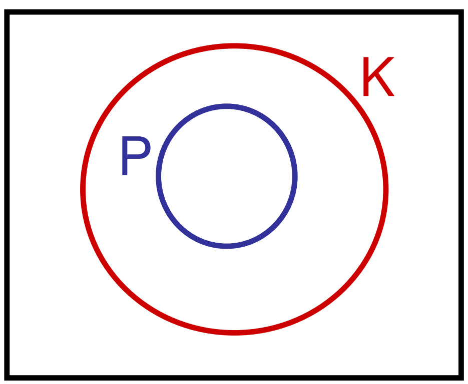


$$\neg \exists x\, (P(x) \wedge \neg K(x))$$

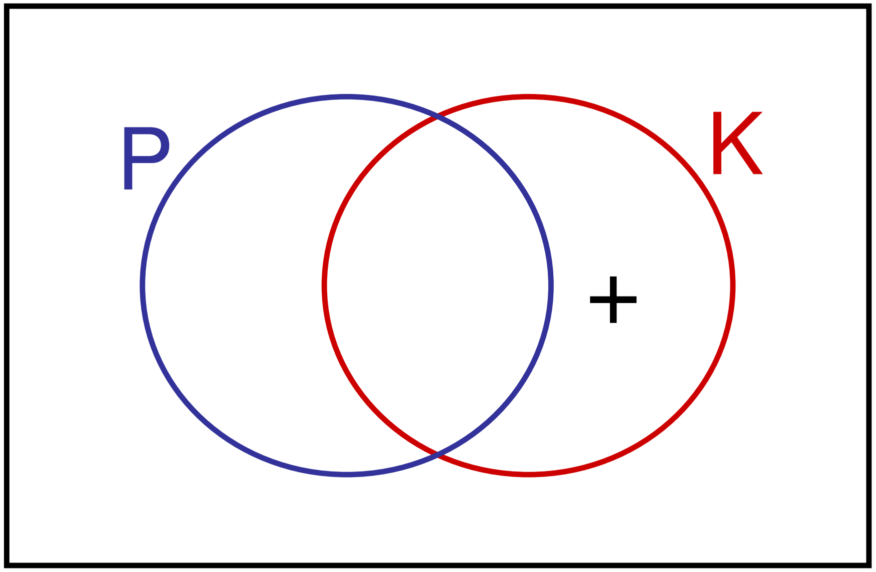
$$\forall x\, \neg(P(x) \wedge \neg K(x))$$

$$\forall x\, (\neg P(x) \vee K(x))$$

$$\forall x\, (P(x) \rightarrow K(x))$$



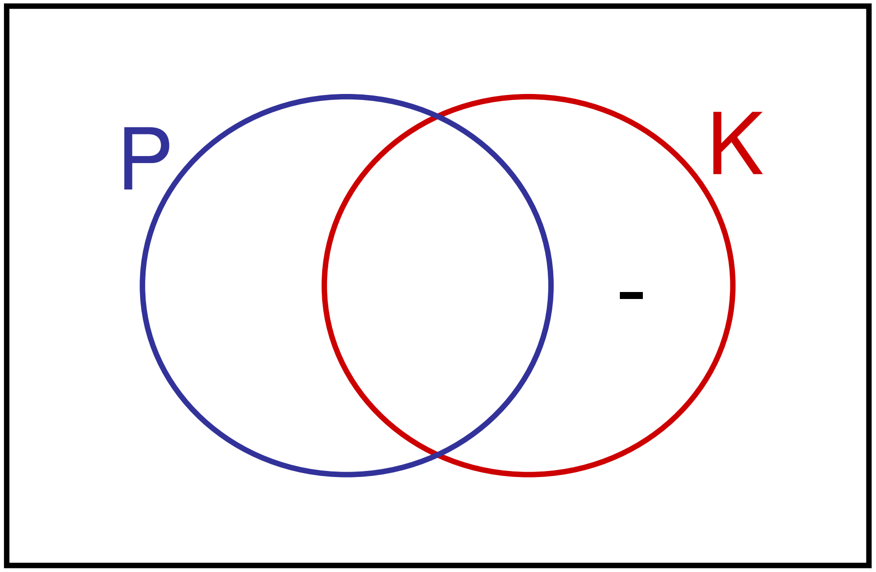
Alle politikere er korrupte.



$\exists x \, (\neg P(x) \wedge K(x))$

Ikke bare politikere er korrupte.

Det fins en korrupt ikke-politiker.

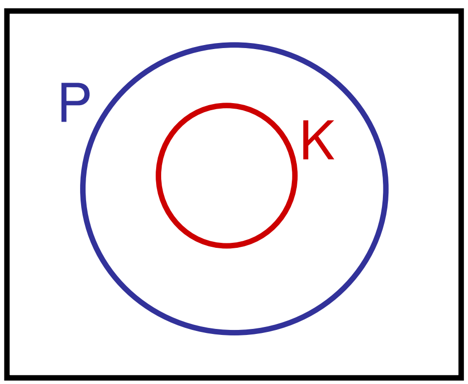


$\neg \exists x\, (\neg P(x) \wedge K(x))$

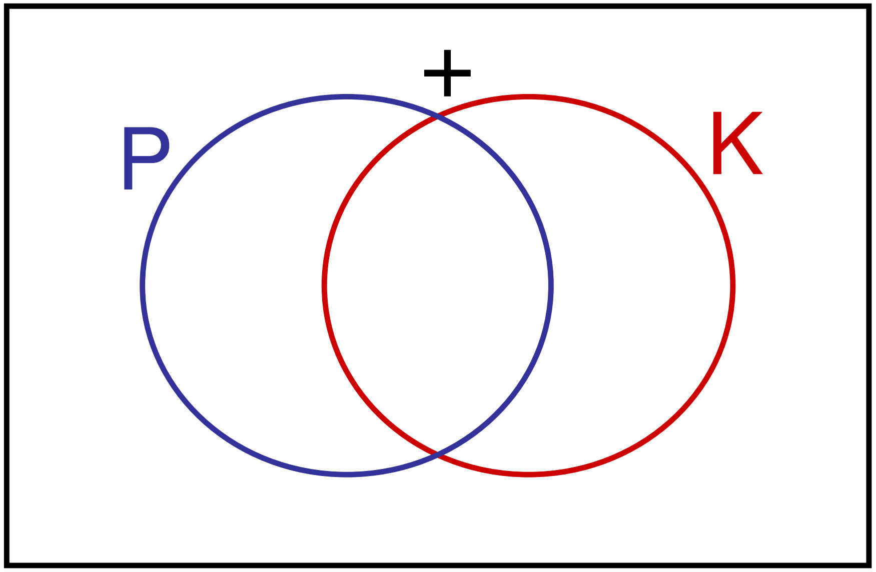
$\forall x\, \neg(\neg P(x) \wedge K(x))$

$\forall x\, (P(x) \vee \neg K(x))$

$\forall x\, (K(x) \rightarrow P(x))$

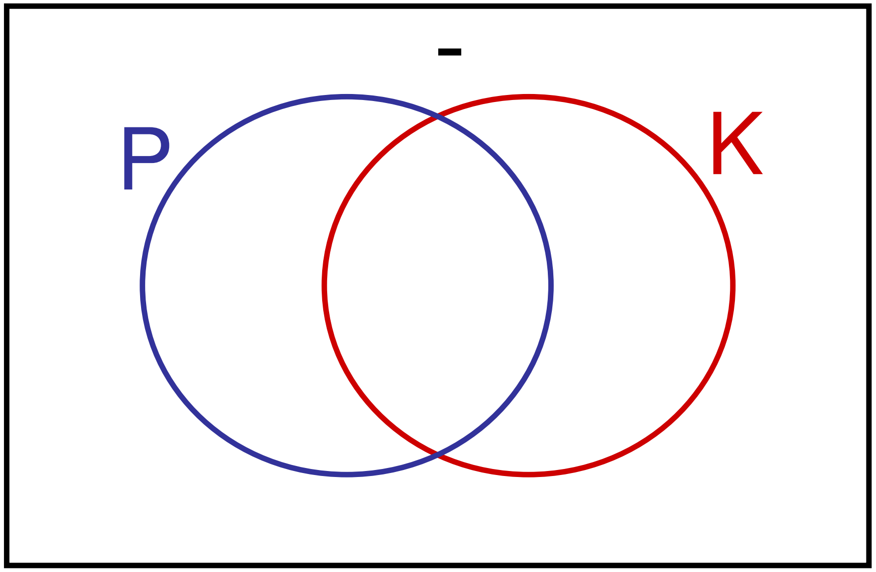


Bare politikere er korrupte.



$\exists x\ (\neg P(x) \wedge \neg K(x))$

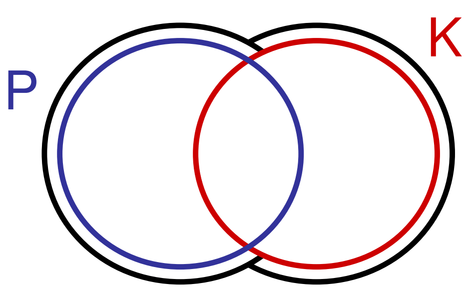
Noen er verken politiker eller korrupt.



$$\neg \exists x\, (\neg P(x) \land \neg K(x))$$

$$\forall x\, \neg(\neg P(x) \land \neg K(x))$$

$$\forall x\, (P(x) \lor K(x))$$



Alle er politikere eller korrupte.

Oversettelse

- Alle politikere $\quad \forall x\,(P(x) \rightarrow \quad)$
- Noen politikere $\quad \exists x\,(P(x) \wedge \quad)$
- Bare politikere $\quad \forall x\,(\quad \rightarrow P(x))$
- Ingen politikere $\quad \neg \exists x\,(P(x) \wedge \quad)$

Oversettelse

- Alle P $\forall x\ (P(x) \rightarrow \qquad)$
- Noen P $\exists x\ (P(x) \wedge \qquad)$
- Bare P $\forall x\ (\qquad \rightarrow P(x)\ )$
- Ingen P $\neg \exists x\ (P(x) \wedge \qquad)$

- Alle politikere kysser alle barn

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow \forall y\ (B(y) \rightarrow K(x,y)))$$

Oversettelse

- Alle P $\forall x\ (P(x) \rightarrow \qquad\quad)$
- Noen P $\exists x\ (P(x) \wedge \qquad\quad)$
- Bare P $\forall x\ (\qquad\quad \rightarrow P(x)\ )$
- Ingen P $\neg\ \exists x\ (P(x) \wedge \qquad\quad)$

- Alle politikere kysser noen barn

$$\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (B(y) \wedge K(x,y)))$$

Oversettelse

- Alle P $\forall x\,(P(x) \rightarrow \quad\quad)$
- Noen P $\exists x\,(P(x) \wedge \quad\quad)$
- Bare P $\forall x\,(\quad\quad \rightarrow P(x)\,)$
- Ingen P $\neg\,\exists x\,(P(x) \wedge \quad\quad)$

- Noen politikere kysser alle barn

$$\exists\, x\,(P(x) \wedge \forall y\,(B(y) \rightarrow K(x,y)))$$

Oversettelse

- Alle P $\forall x\ (P(x) \rightarrow \qquad)$
- Noen P $\exists x\ (P(x) \wedge \qquad)$
- Bare P $\forall x\ (\qquad \rightarrow P(x)\ )$
- Ingen P $\neg \exists x\ (P(x) \wedge \qquad)$

- Noen politikere kysser bare barn

$$\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (K(x,y) \rightarrow B(y)))$$

Oversettelse

- Alle P $\forall x\, (P(x) \rightarrow \qquad)$
- Noen P $\exists x\, (P(x) \wedge \qquad)$
- Bare P $\forall x\, (\qquad \rightarrow P(x))$
- Ingen P $\neg \exists x\, (P(x) \wedge \qquad)$

- Noen politikere kysser ingen barn

$$\exists x\, (P(x) \wedge \neg \exists y\, (B(y) \wedge K(x,y)))$$

Logisk ekvivalens

Logisk ekvivalens

Vi sier at formlene A og B er ***ekvivalente***

og skriver $A \equiv B$

hviss

$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ er gyldig

dvs. A og B har samme sannhetsverdi i alle tolkninger.

Substituerbarhet av ekvivalente formler

Hvis A og B er ekvivalente,

kan vi sette inn B for A i en større formel C uten å endre C's sannhetsverdi i noen tolkning:

Hvis $A \equiv B$ ***så*** $C \equiv C(A/B)$

Eksempel

Siden $R(a,x) \rightarrow R(x,a) \equiv \neg R(a,x) \vee R(x,a)$

har vi også $\neg (R(a,x) \rightarrow R(x,a)) \equiv \neg (\neg R(a,x) \vee R(x,a))$

og $\forall x\, (R(a,x) \rightarrow R(x,a)) \equiv \forall x\, (\neg R(a,x) \vee R(x,a))$

og $\exists x\, (R(a,x) \rightarrow R(x,a)) \equiv \exists x\, (\neg R(a,x) \vee R(x,a))$

etc, etc, etc,…..

(Vi har allerede resonert på denne måten lenge…)

Ekvivalenser i utsagns- og predikatlogikk

Kjenner fra utsagnslogikk:

$$A \vee (B_1 \wedge B_2) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2)$$

$$A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge (A \vee B_3$$

$$A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \wedge B_4) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge (A \vee B_3) \wedge (A \vee B_4)$$

$$A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \wedge B_4 \wedge B_5) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge (A \vee B_3) \wedge (A \vee B_4) \wedge (A \vee B_5$$

$$A \vee (B_1 \wedge B_2 \wedge B_3 \wedge B_4 \wedge B_5 \wedge B_6) \equiv (A \vee B_1) \wedge (A \vee B_2) \wedge (A \vee B_3) \wedge (A \vee B_4) \wedge (A \vee B_5) \wedge (A \vee B_6)$$

Ekvivalenser i utsagns- og predikatlogikk

Kjenner fra utsagnslogikk:

$$A \vee (B(x/a) \wedge B(x/b)) \equiv (A \vee B(x/a)) \wedge (A \vee B(x/b))$$

$$A \vee (B(x/a) \wedge B(x/b) \wedge B(x/c)) \equiv (A \vee B(x/a)) \wedge (A \vee B(x/b)) \wedge (A \vee B(x/c))$$

$$A \vee (B(x/a) \wedge B(x/b) \wedge B(x/c) \wedge B(x/d)) \equiv (A \vee B(x/a)) \wedge (A \vee B(x/b)) \wedge (A \vee B(x/c)) \wedge (A \vee B(x/d))$$

$$A \vee (B(x/a) \wedge B(x/b) \wedge B(x/c) \wedge B(x/d) \wedge B(x/e)) \equiv (A \vee B(x/a)) \wedge (A \vee B(x/b)) \wedge (A \vee B(x/c)) \wedge (A \vee B(x/d)) \wedge (A \vee B(x/e))$$

Hvis A ikke inneholder frie forekomster av x, gir dette for domener I

=

{a}, {a,b}, {a,b,c}, {a,b,c,d}, etc:

$$A \vee \forall x\, B \equiv \forall x\, (A \vee B)$$

Ekvivalenser i utsagns- og predikatlogikk

Tilsvarende korrespondanse mellom

$$A \wedge (B_1 \vee B_2) \equiv (A \wedge B_1) \vee (A \wedge B_2)$$

og følgende, når A ikke inneholder frie forekomster av x:

$$A \wedge \exists x\, B \equiv \exists x\, (A \wedge B)$$

Disse og noen liknende ekvivalenser som vi nå skal se på, tillater oss å skrive enhver formel om til en ekvivalent formel på prenex normalform. (Definisjon følger)

Og til prenex disjunktiv normalform, og til prenex konjunktiv normalform, som også må defineres….

Prenex normalform

- En formel er i ***prenex normalform*** hvis den kan skrives som en streng av kvantorer etterfulgt av en kvantorfri del.
- Disse to delene omtales henholdsvis som kvantor-prefikset og matriks.

$$\forall v\, \exists w\, \exists x\, \forall y\, \exists z\, ((P(x) \rightarrow P(y)) \rightarrow (R(x,w) \rightarrow R(v,z) \land P(y)))$$

Prenex disjunktiv normalform

- En formel er i ***prenex disjunktiv normalform*** hvis den er i prenex normalform, med matriks i disjunktiv normalform.

$$\forall v\ \exists w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ ((P(x) \land \neg P(y)) \lor \neg R(x,w) \lor (R(v,z) \land P(y)))$$

Prenex konjunktiv normalform

En formel er i ***prenex konjunktiv normalform*** hvis den er i prenex normalform, med matriks i konjunktiv normalform.

$$\forall v\ \exists w\ \exists x\ \forall y\ \exists z\ (\ (P(x) \vee \neg R(x,w) \vee R(v,z)) \wedge$$
$$(P(x) \vee \neg R(x,w) \vee P(y)) \wedge$$
$$(\neg P(y) \vee \neg R(x,w) \vee R(v,z)))$$

Omskriving til prenex normalform

Hvilken som helst formel kan skrives om til en ekvivalent formel i prenex normalform.

Dette går i to trinn – først skriver vi om til en kvantor-standardisert formel:

Kvantor-standardisert

En formel er ***kvantor-standardisert*** hvis

- den ikke inneholder to kvantorer for samme variabel, og dessuten
- hvis den inneholder frie forekomster av en variabel, da inneholder den ikke kvantorer for samme variabel.

(Altså ingen “gjenbruk” av variabler.)

Gjenbruk elimineres ved omdøping av variabler.

Omdøping av variabler

$$\forall x\, A \equiv \forall y\, A(x/y)$$

$$\exists x\, A \equiv \exists y\, A(x/y)$$

når y ikke forekommer (verken fri eller bundet) i A

Ved gjentatt bruk av dette kan vi skrive om en hvilken som helst formel til en kvantor-standardisert formel.

Omskriving til prenex normalform

Etter omskrining til kvantor-standardisert from, er neste trinn å flytte alle kvantorer ut.

Dette krever en del ekvivalenser.

To viktige ekvivalenser

PS: Husk at Kvantorene har høy presendens!

$$A \land (\exists x\, B) \equiv \exists x\, (A \land B)$$

$$A \lor (\forall x\, B) \equiv \forall x\, (A \lor B)$$

... og dermed selvfølgelig også

$$(\exists x\, B) \land A \equiv \exists x\, (B \land A)$$

$$(\forall x\, B) \lor A \equiv \forall x\, (B \lor A)$$

(når A ikke inneholder frie forekomster av x)

Tilsvarende:

$$A \vee \exists x\, B \quad \equiv \quad \exists x\, (A \vee B)$$

$$A \wedge \forall x\, B \quad \equiv \quad \forall x\, (A \wedge B)$$

... og

$$\exists x\, B \vee A \quad \equiv \quad \exists x\, (B \vee A)$$

$$\forall x\, B \wedge A \quad \equiv \quad \forall x\, (B \wedge A)$$

(når A ikke inneholder frie forekomster av x)

Dessuten:

$$\neg \exists x\, B \equiv \forall x \neg B$$
$$\neg \forall x\, B \equiv \exists x \neg B$$

… som kombinert med ekvivalensene for $\vee$ foran gir

$$(\exists x\, B) \rightarrow A \equiv \forall x\, (B \rightarrow A)$$
$$(\forall x\, B) \rightarrow A \equiv \exists x\, (B \rightarrow A)$$

$$A \rightarrow \exists x\, B \equiv \exists x\, (A \rightarrow B)$$
$$A \rightarrow \forall x\, B \equiv \forall x\, (A \rightarrow B)$$

Og kvantorene har altså høy presendens.

(når A ikke inneholder frie forekomster av x)

Eksempel

$$\exists x\, P(x) \rightarrow \forall x\, P(x)$$

Skrives først om til en kvantor-standardisert formel:_

$$\exists x\, P(x) \rightarrow \forall y\, P(y)$$

Deretter flyttes de to kvantorene ut:

$$\forall x\, (P(x) \rightarrow \forall y\, P(y))$$

$$\forall x\, \forall y\, (P(x) \rightarrow P(y))$$