$$\forall x\, A \rightarrow A(x/t)$$ er gyldig …

… såfremt t ikke inneholder en variabel
som “fanges av” en kvantor i A
når den settes inn for x.

Det skal altså ikke finnes en variabel y i t

$$\underbrace{\quad y \quad}_{t}$$

og en kvantor $\forall$y eller $\exists$y i A med en fri
forekomst av x i skopet sitt

$$\underbrace{\forall y(\ldots x\ldots)}_{A}$$

$$\forall x\, A \to A(x/t)$$

Når dette kravet er oppfylt, sier vi at t er fri for x i A.

Altså: Termen t er fri for variabelen x i formelen A dersom ingen fri forekomst av x i A er innenfor skopet til en kvantor som binder en av variablene i t.

I to viktige tilfeller er dette automatisk oppfylt:

1. t inneholder ikke variabler.
   (Den er for eksempel en konstant.)
2. A inneholder ikke kvantorer.

Universell instansiering (UI)

Vi kan bruke dette til å lage en regel for universell instansiering i naturlig deduksjon:

$$\frac{\forall x\, A}{A(x/t)} \quad \text{hvis } t \text{ er fri for } x \text{ i } A$$

Bruk av UI

Vil resonere

fra: $\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \land R(y,z) \rightarrow R(x,z))$ og

$\forall x\, R(x,f(x))$

til: $\forall x\, R(x,f(f(x)))$

$$\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{f} \bullet$$

1	$\forall x \forall y \forall z\ (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	P
2	$\forall x\ R(x,f(x))$	P
3	$R(v,f(v))$	2, UI
4	$R(f(v),f(f(v)))$	2, UI
5	$R(v,f(v)) \wedge R(f(v),f(f(v)))$	3,4,Conj
6	$\forall y \forall z\ (R(v,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(v,z))$	1, UI
7	$\forall z\ (R(v,f(v)) \wedge R(f(v),z) \rightarrow R(v,z))$	6, UI
8	$R(v,f(v)) \wedge R(f(v),f(f(v))) \rightarrow R(v,f(f(v)))$	7, UI
9	$R(v,f(f(v)))$	8,4, MP

…… men hva nå?

Universell generalisering (UG)

$$\frac{A(x/y)}{\forall x\ A}$$

hvis y er fri for x i A
og y ikke er fri i $\forall x$ A
eller i noen premisser

("Hvis A gjelder for en vilkårlig y som vi ikke har antatt noe spesielt om, så gjelder A for alle x.")

1	$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \land R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	P
2	$\forall x\, R(x,f(x))$	P
3	$R(v,f(v))$	2, UI
4	$R(f(v),f(f(v)))$	2, UI
5	$R(v,f(v)) \land R(f(v),f(f(v)))$	3,4,Conj
6	$\forall y \forall z\, (R(v,y) \land R(y,z) \rightarrow R(v,z))$	1, UI
7	$\forall z\, (R(v,f(v)) \land R(f(v),z) \rightarrow R(v,z))$	6, UI
8	$R(v,f(v)) \land R(f(v),f(f(v))) \rightarrow R(v,f(f(v)))$	7, UI
9	$R(v,f(f(v)))$	8,4, MP
10	$\forall x\, R(x,f(f(x)))$	9, UG

Eksistensiell generalisering og instansiering (EG og EI)

… er nokså tilsvarende regler for fjerning og introduksjon av eksistenskvantor.

EG

… ligner egentlig mest på UI:

$$\frac{A(x/t)}{\exists x\ A}$$

hvis t er fri for x i A

Eksistensiell generalisering og instansiering (EG og EI)

… er nokså tilsvarende regler for fjerning og introduksjon av eksistenskvantor.

EI

… ligner egentlig mest på UI:

$$\frac{\exists x \; A}{A(x/c)}$$

c er en "ny" konstant som ikke får lov til å forekomme i konklusjonen

(A gjelder for et eller annet element. "La oss kalle det c."

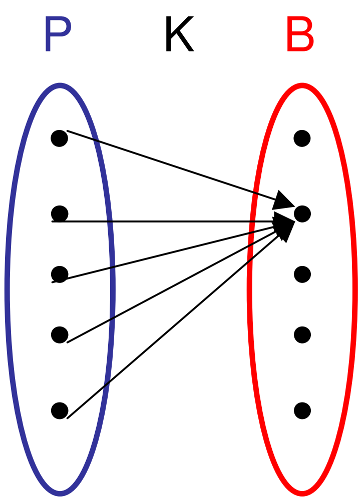
definert, blir EI en litt skummel regel som setter store (og uklare) begrensninger på når og hvordan andre regler kan brukes. Vi vil derfor gå forholdsvis fort videre til en sekventkalkyle, men ett eksempel til spanderer

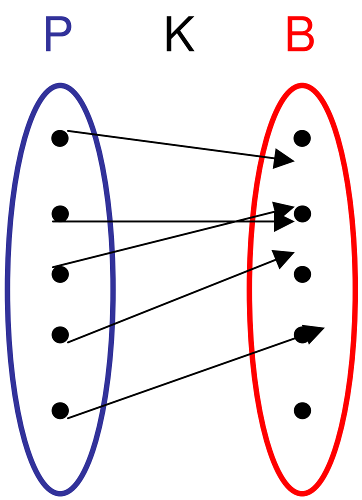
Bruk av flere regler

Vil resonere

fra: $\exists y\,(B(y) \land \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,y)))$

til: $\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists y\,(B(y) \land K(x,y)))$





1	$\exists y\,(B(y) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,y)))$	P
2	$B(c) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,c))$	1, EI
3	$\forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,c))$	2, Simp
4	$P(v) \rightarrow K(v,c)$	3, UI
5	$B(c)$	2,Simp
6	$P(v)$	P
7	$K(v,c)$	4,6,MP
8	$B(c) \wedge K(v,c)$	5,7,Conj
9	$\exists y\,(B(y) \wedge K(v,y))$	8,EG
10	$P(v) \rightarrow \exists y\,(B(y) \wedge K(v,y))$	6,9,CP
11	$\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists y\,(B(y) \wedge K(x,y)))$	10,UG

Sekventkalkyle

En ny regel for hver kombinasjon av V/H og ∃/∀.

H∀ tilsvarer UG:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x/y), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, A, \Pi}$$

hvis y er fri for x i A

og y ikke er fri i sekventen under streken

Sekventkalkyle

En ny regel for hver kombinasjon av V/H og ∃/∀.

V∃ tilsvarer EI (!)

$$\frac{\Gamma,\ A(x/y),\ \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma,\ \exists x\, A,\ \Delta \Rightarrow \Pi}$$

hvis y er fri for x i A

og y ikke er fri i sekventen under streken

Sekventkalkyle

En ny regel for hver kombinasjon av V/H og $\exists/\forall$.

V$\forall$ tilsvarer UI.

Enkel versjon. (Sterkere versjon følger…)

$$\frac{\Gamma, A(x/t), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \forall x\, A, \ \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \text{hvis t er fri for x i A}$$

Sekventkalkyle

En ny regel for hver kombinasjon av V/H og ∃/∀.

H∃ tilsvarer EG.

Enkel versjon. (Sterkere versjon følger…)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x/t), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, A, \Pi}$$

hvis t er fri for x i A

Gjør dette om til et bevis i sekventkalkyle

	$\exists y\,(B(y) \land \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,y)))$	P
2	$\ldots) \land \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,c))$	1, EI
3	$\forall \ldots \rightarrow K(x,c))$	2, Simp
4	$P(x) \rightarrow \ldots$	3, UI
5	$B(c)$	2,Simp
6	$\quad P(x)$	P
7	$\quad K(x,c)$	4,6,MP
8	$\quad B(c) \land K(x,c)$	…Conj
9	$\quad \exists y\,(B(y) \land K(x,y))$	8,…
10	$P(x) \rightarrow \exists y\,(B(y) \land K(x,y))$	6,9,CP
11	$\forall x\,(P(x) \rightarrow \exists y\,(B(y) \land K(x,y)))$	10,UG

$$B(u), P(v) \Rightarrow K(v,u), P(v) \qquad B(u), K(v,u), P(v) \Rightarrow K(v,u)$$

V→

$$B(u), P(v) \rightarrow K(v,u), P(v) \Rightarrow K(v,u)$$

V∀

$$B(u), \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,u)), P(v) \Rightarrow K(v,u)$$

$$B(u), \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,u)), P(v) \Rightarrow B(u)$$

H∧

$$B(u), \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,u)), P(v) \Rightarrow B(u) \wedge K(v,u)$$

H∃

$$B(u), \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,u)), P(v) \Rightarrow \exists y\,(B(y) \wedge K(v,y))$$

V∧

$$B(u) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,u)), P(v) \Rightarrow \exists y\,(B(y) \wedge K(v,y))$$

V∃

$$\exists y\,(B(y) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,y))), P(v) \Rightarrow \exists y\,(B(y) \wedge K(v,y))$$

H→

$$\exists y\,(B(y) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,y))) \Rightarrow P(v) \rightarrow \exists y\,(B(y) \wedge K(v,y))$$

H∀

$$\exists y\,(B(y) \wedge \forall x\,(P(x) \rightarrow K(x,y))) \Rightarrow \forall x\,(P(x) \rightarrow \exists y\,(B(y) \wedge K(x,y)))$$

1	$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$	P
2	$\forall x\, R(x,f(x))$	P
3	$R(v,f(v))$	2, UI
4	$R(f(v),f(f(v)))$	2, UI
[illegible]	[illegible] $(v,f(v)) \land R(f(v),f(f(v)))$	3,4,Conj
6	$\forall y$ [illegible] $v) \land R(y,z) \to R(v,z))$	1, UI
7	$\forall z\, (R(v,f(v$ [illegible] $f(v),z) \to R(v,z))$	6, UI
8	$R(v,f(v)) \land R(f(v),f($ [illegible] $\to R(v,f(f(v)))$	7, UI
9	$R(v,f(f(v)))$	8,4, MP
10	$\forall x\, R(x,f(f(x)))$	9, UG

To anvendelser av UI på samme formel.

Gjør dette om til et bevis i sekventkalkyle

V∀ tilsvarer UI:

$$\frac{\Gamma,\ A(x/t),\ \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma,\ \forall x\, A,\ \Delta \Rightarrow \Pi}$$

$$\frac{\Gamma,\ R(v,f(v)),\ \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma,\ \forall x\, R(x,f(x)),\ \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma,\ R(f(v),f(f(v))),\ \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma,\ \forall x\, R(x,f(x)),\ \Delta \Rightarrow \Pi}$$

? ?

$$\frac{\Gamma,\ A(x/t1),\ A(x/t2),\ \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma,\ \forall x\ A,\ \ \Delta \Rightarrow \Pi}$$

$$\frac{\Gamma,\ R(v,f(v)),\ R(f(v),f(f(v))),\ \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma,\ \forall x\ R(x,f(x)),\ \ \Delta \Rightarrow \Pi}$$

Greit nok her, men i andre bevis trenger vi kanskje tre instanser.

Eller fire. Eller fem. Eller…

V∀, endelig versjon:

$$\frac{\Gamma, \forall x\, A, A(x/t), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \forall x\, A, \Delta \Rightarrow \Pi}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, \forall x\, A, A(x/t3), A(x/t2), A(x/t1), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \forall x\, A, A(x/t2), A(x/t1), \Delta \Rightarrow \Pi}}{\Gamma, \forall x\, A, A(x/t1), \Delta \Rightarrow \Pi}}{\Gamma, \forall x\, A, \Delta \Rightarrow \Pi}$$

H∃, endelig versjon:

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\ A, A(x/t), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\ A, \Pi}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\ A, A(x/t3), A(x/t2), A(x/t1), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\ A, A(x/t2), A(x/t1), \Pi}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\ A, A(x/t1), \Pi}}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\ A, \Pi}$$

1	$\forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z))$	P
2	$\forall x\, R(x,f(x))$	P
3	$R(v,f(v))$	2, UI
4	$R(f(v),f(f(v)))$	2, UI
5	$R(v,f(v)) \wedge R(f(v),f(f(v)))$	3,4,Conj
6	$\forall y \forall z\, (R(v,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(v,z))$	1, UI
7	$\forall z\, (R(v,f(v)) \wedge R(f(v),z) \rightarrow R(v,z))$	6, UI
8	$R(v,f(v)) \wedge R(f(v),f(f(v))) \rightarrow R(v,f(f(v)))$	7, UI
9	$R(v,f(f(v)))$	8,4, MP
10	$\forall x\, R(x,f(f(x)))$	9, UG

Gjør dette om til et bevis i sekventkalkyle

$$\forall x\, R(x,f(x)),\ R(v,f(v)),\ R(f(v),f(f(v))),\ \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \Rightarrow R(v,f(f(v)))$$

$$\forall x\, R(x,f(x)),\ R(v,f(v)),\ \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \Rightarrow R(v,f(f(v)))$$

$$\forall x\, R(x,f(x)),\ \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \Rightarrow R(v,f(f(v)))$$

$$\forall x\, R(x,f(x)),\ \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z) \rightarrow R(x,z)) \Rightarrow \forall x\, R(x,f(f(x)))$$

- Kyr er klovdyr $\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$
- Klovdyr er dyr $\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$
- Klovdyr er vegetarianere $\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$
- Vegetarianere spiser ikke dyr $\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$
- Dagros og Litago er kyr $ku(d) \wedge ku(l)$

- Dagros spiser ikke Litago $\neg\ s(d, l)$

$$\forall x\,(ku(x) \rightarrow kd(x))$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow d(x))$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow veg(x))$$
$$\forall x\,(veg(x) \rightarrow \neg \exists y\,(d(y) \wedge s(x,y)))$$
$$ku(d)$$
$$ku(l)$$

$$\Rightarrow \quad \neg\, s(d, l)$$

$$\forall x\,(ku(x) \rightarrow kd(x))$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow d(x))$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow veg(x))$$
$$\forall x\,(veg(x) \rightarrow \neg \exists y\,(d(y) \wedge s(x,y)))$$
$$ku(d) \wedge ku(l)$$

$$\Rightarrow \quad \neg\, s(d, l)$$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$ $\Rightarrow$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg\, \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$
$ku(l)$
$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$ $\Rightarrow$ $\neg\, s(d, l)$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg\, \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$
$ku(l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$ku(d) \rightarrow kd(d)$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$ $\Rightarrow$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$
$ku(l)$
$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$ $\Rightarrow$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$
$ku(l)$
$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$kd(d)$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$

$ku(l)$

$s(d, l)$

$\Rightarrow$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$ $\Rightarrow ku(d)$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$

$ku(l)$

$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$ku(d) \rightarrow kd(d)$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$ $\Rightarrow$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$

$ku(l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$kd(d)$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$

$kd(d) \rightarrow veg(d)$ $\Rightarrow$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$

$ku(l)$

$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$kd(d)$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$ $\Rightarrow$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$

$ku(l)$

$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \to kd(x))$
$kd(d)$
$\forall x\ (kd(x) \to d(x))$
$\forall x\ (kd(x) \to veg(x))$
$veg(d) \qquad \Rightarrow$
$\forall x\ (veg(x) \to \neg \exists y\ (d(y) \land s(x,y)))$
$ku(d)$
$ku(l)$
$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \to kd(x))$
$kd(d)$
$\forall x\ (kd(x) \to d(x))$
$\forall x\ (kd(x) \to veg(x))$
$\Rightarrow \quad kd(d)$
$\forall x\ (veg(x) \to \neg \exists y\ (d(y) \land s(x,y)))$
$ku(d)$
$ku(l)$
$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \to kd(x))$
$kd(d)$
$\forall x\ (kd(x) \to d(x))$
$\forall x\ (kd(x) \to veg(x))$
$kd(d) \to veg(d) \qquad \Rightarrow$
$\forall x\ (veg(x) \to \neg \exists y\ (d(y) \land s(x,y)))$
$ku(d)$
$ku(l)$
$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$kd(d)$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$

$veg(d)$ $\Rightarrow$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$veg(d) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(d,y))$

$ku(d)$

$ku(l)$

$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$kd(d)$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$

$veg(d)$ $\Rightarrow$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$

$ku(l)$

$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$
$kd(d)$
$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$
$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$
$veg(d)$ $\Rightarrow$
$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$
$\neg \exists y\ (d(y) \wedge s(d,y))$
$ku(d)$
$ku(l)$
$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$
$kd(d)$
$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$
$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$
$veg(d)$ $\Rightarrow$ $veg(d)$
$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$
$ku(d)$
$ku(l)$
$s(d, l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$
$kd(d)$
$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$
$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$
$veg(d)$ $\Rightarrow$
$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$
$veg(d) \rightarrow \neg \exists y\ (d(y) \wedge s(d,y))$
$ku(d)$
$ku(l)$
$s(d, l)$

$$\forall x\,(ku(x) \rightarrow kd(x))$$
$$kd(d)$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow d(x))$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow veg(x))$$
$$veg(d) \qquad \Rightarrow \quad \exists y\,(d(y) \wedge s(d,y))$$
$$\forall x\,(veg(x) \rightarrow \neg \exists y\,(d(y) \wedge s(x,y)))$$

$$ku(d)$$
$$ku(l)$$
$$s(d, l)$$

$$\forall x\,(ku(x) \rightarrow kd(x))$$
$$kd(d)$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow d(x))$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow veg(x))$$
$$veg(d) \qquad \Rightarrow$$
$$\forall x\,(veg(x) \rightarrow \neg \exists y\,(d(y) \wedge s(x,y)))$$
$$\neg \exists y\,(d(y) \wedge s(d,y))$$
$$ku(d)$$
$$ku(l)$$
$$s(d, l)$$

$$\forall x\,(ku(x) \rightarrow kd(x))$$
$$kd(d)$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow d(x))$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow veg(x))$$
$$veg(d)$$
$$\forall x\,(veg(x) \rightarrow \neg\,\exists y\,(d(y) \wedge s(x,y)))$$
$$ku(d)$$
$$ku(l)$$
$$s(d, l)$$

$$\Rightarrow \quad \exists y\,(d(y) \wedge s(d,y))$$
$$d(l) \wedge s(d,l)$$

$$\forall x\,(ku(x) \rightarrow kd(x))$$
$$kd(d)$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow d(x))$$
$$\forall x\,(kd(x) \rightarrow veg(x))$$
$$veg(d)$$
$$\forall x\,(veg(x) \rightarrow \neg\,\exists y\,(d(y) \wedge s(x,y)))$$
$$ku(d)$$
$$ku(l)$$
$$s(d, l)$$

$$\Rightarrow \quad \exists y\,(d(y) \wedge s(d,y))$$

$\forall x\,(ku(x) \rightarrow kd(x))$

$kd(d)$

$\forall x\,(kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\,(kd(x) \rightarrow veg(x))$

$veg(d)$

$\forall x\,(veg(x) \rightarrow \neg\,\exists y\,(d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d) \quad ku(l) \quad s(d, l)$

$\Downarrow$

$\exists y\,(d(y) \wedge s(d,y)) \quad d(l)$

$\forall x\,(ku(x) \rightarrow kd(x))$

$kd(d)$

$\forall x\,(kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\,(kd(x) \rightarrow veg(x))$

$veg(d)$

$\forall x\,(veg(x) \rightarrow \neg\,\exists y\,(d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d) \quad ku(l) \quad s(d, l)$

$\Downarrow$

$\exists y\,(d(y) \wedge s(d,y)) \quad s(d,l)$

$\forall x\,(ku(x) \rightarrow kd(x))$

$kd(d)$

$\forall x\,(kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\,(kd(x) \rightarrow veg(x))$

$veg(d)$

$\forall x\,(veg(x) \rightarrow \neg\,\exists y\,(d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d) \quad ku(l) \quad s(d, l)$

$\Downarrow$

$\exists y\,(d(y) \wedge s(d,y)) \quad d(l) \wedge s(d,l)$

$\forall x\ (ku(x) \rightarrow kd(x))$

$kd(d)$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow d(x))$

$\forall x\ (kd(x) \rightarrow veg(x))$

$veg(d)$

$\forall x\ (veg(x) \rightarrow \neg\, \exists y\ (d(y) \wedge s(x,y)))$

$ku(d)$ $ku(l)$ $s(d, l)$

$\Downarrow$

$\exists y\ (d(y) \wedge s(d,y))$ $d(l)$