Utsagnslogikk

En formel er gyldig hviss den sann i alle tolkninger

Tolkning = linje i sannhetsverditabell

Altså: En formel er gyldig hviss den har T i alle linjene i sin sannhetsverditabell.

Dette kan (i prinsippet) sjekkes automatisk

Predikatlogikk

# En formel er gyldig hviss den sann i alle tolkninger

Kan dette sjekkes automatisk?

Dvs.: Kan vi skrive et generelt program som får inn vilkårlige formler og alltid er i stand til å avgjøre om de er gyldige?

# NEI

Det kan finnes uendelig mange tolkninger.  Vi vil aldri bli ferdige med å sjekke hver eneste en.

… og det er heller ikke nok systematiske likheter mellom dem til at vi alltid kan finne frem til et tilstrekkelig, endelig utvalg som vi kan begrense sjekken til..

# Automatisk opplistbar

- Vi kan, imidlertid, skrive et program som lister opp alle gyldige formler.

… altså en ”evighetsmaskin” som lister opp bare gyldige formler, på en slik måte at hver eneste gyldig formel før eller siden vil dukke opp.

Nærmere bestemt, vi har et sunt og komplett bevissystem for predikatlogikk:

Dvs. et system av aksiomer og slutningsregler som bare lar oss bevise gyldige formler, OG lar oss bevise alle gyldige formler.

OG det er så lett å sjekke om et foreslått bevis er lovlig i forhold til reglene, at selv et program kan gjøre det.

# ”Evighetsmaskinen” …

Trenger dermed bare å produsere alle mulige lister av formler i tur og orden, deretter sjekke hvilke lister som er beviser, og skrive ut alle formler som inngår (evt. Står på slutten av) bevisene.

Hvis dette gjøres på en ”rettferdig måte” som sikrer at alle bevis prøves ut (for eksempel ved at beviser av lengde 1 prøves ut først, deretter beviser av lengde 2, deretter beviser av lengde 3) vil alle gyldige formler før eller siden komme ut av maskinen, fordi bevissystemet er komplett.

# Kompletthetsbeviset for sekventkalkylen for utsagnslogikk

hadde fire hjørnesteiner:

0. En gyldig sekvent med bare atomære formler er et aksiom
1. Alle regler bevarer gyldighet begge veier
2. Enhver sekvent som ikke bare inneholder atomære formler, vil matche sekventen under streken i minst en regel.
3. I hver regel er sekventene over streken enklere enn sekventen under streken.

? ✔ 0. En gyldig sekvent med bare atomære formler er et aksiom

? ✗ 1. Alle regler bevarer gyldighet begge veier

? ✔ 2. Enhver sekvent som ikke bare inneholder atomære formler, vil matche sekventen under streken i minst en regel.

? ✔ 3. I hver regel er sekventene over streken enklere enn sekventen under streken.

# Hvordan blir dette i system for predikatlogikk med følgende regler i tillegg?

$$\frac{\Gamma, A(x/y), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \exists x\, A, \ \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x/y), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, A\, , \Pi}$$

y fri for x i A, og y ikke fri under streken

$$\frac{\Gamma, A(x/t), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \forall x\, A, \ \Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x/t), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, A\, , \Pi}$$

t fri for x i A

? ✔ 0. En gyldig sekvent med bare atomære formler er et aksiom

? ✔ 1. Alle regler bevarer gyldighet begge veier

? ✔ 2. Enhver sekvent som ikke bare inneholder atomære formler, vil matche sekventen under streken i minst en regel.

? ✗ 3. I hver regel er sekventene over streken enklere enn sekventen under streken.

# Hvordan blir dette i system for predikatlogikk med følgende regler i tillegg?

$$\frac{\Gamma, A(x/y), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \exists x\, A, \;\Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A(x/y), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x\, A, \Pi}$$

y fri for x i A, og y ikke fri under streken

$$\frac{\Gamma, \forall x\, A, A(x/t), \Delta \Rightarrow \Pi}{\Gamma, \forall x\, A, \;\Delta \Rightarrow \Pi} \qquad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, A, A(x/t), \Pi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x\, A, \Pi}$$

t fri for x i A

# Kompletthet likevel

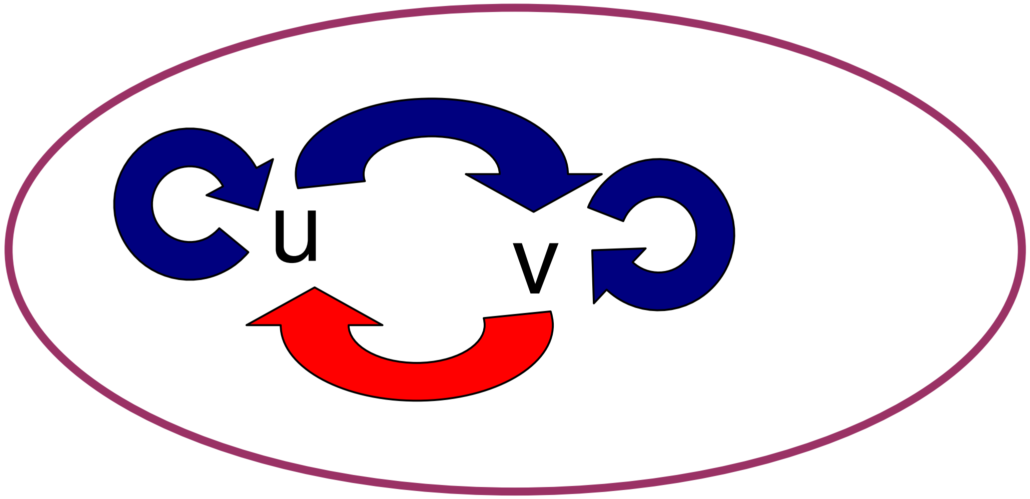
- Det siste systemet er likevel komplett, men i motsetning til i utsagnslogikk har vi ikke lenger noen kontroll på når søket etter bevis eventuelt tar slutt.

# Bevisstrategi

- Alle formler som dukker opp skal analyseres, det vil si vi skal bruke en regel på dem baklengs.
- I formler til venstre med $\forall x$ ytterst og formler til høyre med $\exists x$ ytterst skal vi dessuten før eller siden sette inn for x alle termer som kan bygges opp ved hjelp av variabler, konstanter og funksjonssymboler som opptrer andre steder i beviset.

# Eksempel

- En universell setning er en formel uten frie variabler, og dessuten på preneks normalform med bare allkvantorer i prefikset.
- Strategien i forrige slide vil alltid ta slutt hvis sekventen bare består av universelle setninger uten funksjonssymboler.




$$\forall x\, R(x,x),\ R(u,u),\ R(v,v),\ R(u,v) \Rightarrow R(v,u)$$

V∀

$$\forall x\, R(x,x),\ R(v,v),\ R(u,v) \Rightarrow R(v,u)$$

V∀

$$\forall x\, R(x,x),\ R(u,v) \Rightarrow R(v,u)$$

H→

$$\forall x\, R(x,x) \Rightarrow R(u,v) \rightarrow R(v,u)$$

H∀

$$\forall x\, R(x,x) \Rightarrow \forall y\, (R(u,y) \rightarrow R(y,u))$$

H∀

$$\forall x\, R(x,x) \Rightarrow \forall x\, \forall y\, (R(x,y) \rightarrow R(y,x))$$

$$\forall y R(v1,y),\ R(v1,v2),\ R(v1,v1) \Rightarrow \exists y \forall x R(x,y),\ R(v3,v2),\ R(v2,v1)$$

V∀

$$\forall y R(v1,y),\ R(v1,v2),\ R(v1,v1) \Rightarrow \exists y \forall x R(x,y),\ \forall x R(x,v2),\ R(v2,v1)$$

H∃

$$\forall y R(v1,y),\ R(v1,v2),\ R(v1,v1) \Rightarrow \exists y \forall x R(x,y), R(v2,v1)$$

V∀

$$\forall y R(v1,y),\ R(v1,v1) \Rightarrow \exists y \forall x R(x,y), R(v2,v1)$$

V∀

$$\forall y R(v1,y),\ R(v1,v1) \Rightarrow \exists y \forall x R(x,y), \forall x R(x,v1)$$

H∃

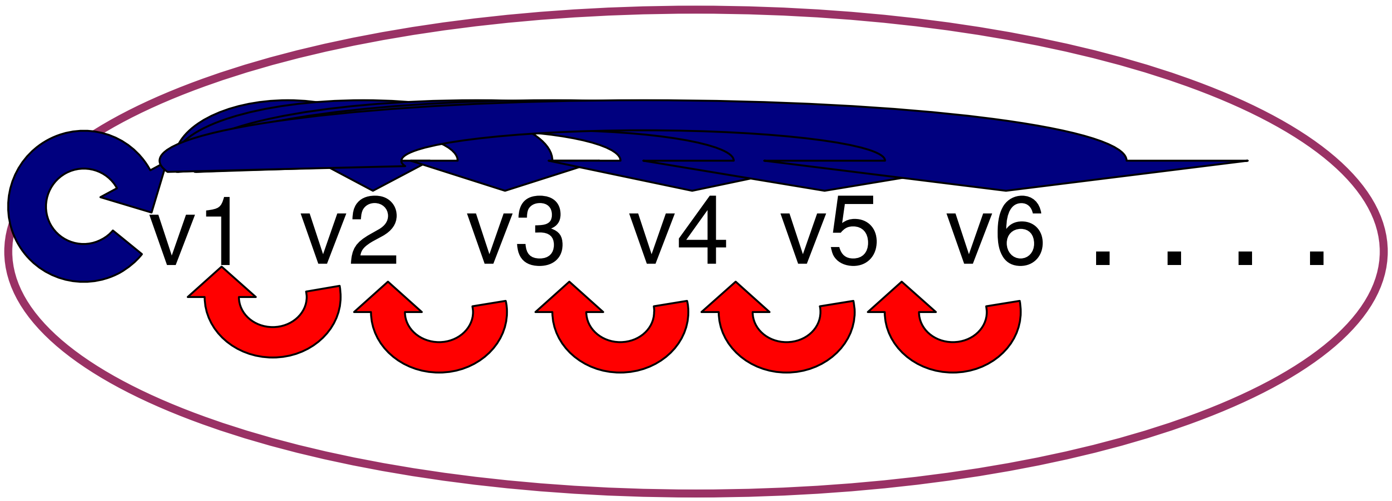
$$\forall y R(v1,y),\ R(v1,v1) \Rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$$

V∀

$$\forall y R(v1,y) \Rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$$

V∃

$$\exists x \forall y R(x,y) \Rightarrow \exists y \forall x R(x,y)$$




$$\exists x \forall y R(x,y) \cancel{\Rightarrow} \exists y \forall x R(x,y)$$

$R(v1,v5)$

$R(v1,v4)$ $\qquad$ $R(v5,v4)$

$R(v1,v3)$ $\qquad$ $R(v4,v3)$

$R(v1,v2)$ $\qquad$ $R(v3,v2)$

$\forall y R(v1,y)$ $\quad$ $R(v1,v1)$ $\quad \Rightarrow \quad$ $\exists y \forall x R(x,y)$ $\quad$ $R(v2,v1)$