Løsningsforslag til Obligatorisk oppgave 1

INF1800 – Logikk og beregnbarhet – Høsten 2008

Alfred Bratterud

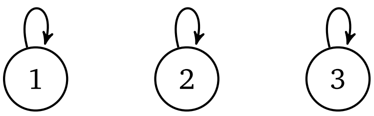
Oppgave 1 (Mengdelære)

En relasjon R over en mengde A er

refleksiv hvis paret $\langle x, x\rangle \in A$ for alle $x \in A$
symmetrisk hvis $\langle x, y\rangle \in A \Rightarrow \langle y, x\rangle \in A$ for alle $x \in A$
transitiv hvis $\langle x, y\rangle \in A$ og $\langle y, z\rangle \in A \Rightarrow \langle x, z\rangle \in A$

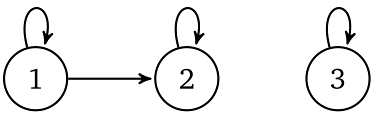
Fra utsagnslogikk har vi at $A \to B$ er sann når A er usann. I disse tilfellene sier vi at utsagnet er *tomt oppfylt*. I definisjonene over har jeg brukt $\Rightarrow$ fordi vi ikke jobber i det formelle logiske språket, men det samme prinsippet gjelder.

a) $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ er *refleksiv, symmetrisk og transitiv*



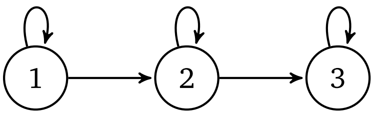
Relasjonen er refleksiv, fordi vi har $\langle x, x\rangle \in R_1$ for alle $x \in A$. Siden x kan være lik y har vi også at den er symmetrisk og transitiv. Symmetrisk fordi når vi har $\langle x, y\rangle$ har vi også $\langle y, x\rangle$ og transitiv, fordi når vi har $\langle x, y\rangle$ og $\langle y, z\rangle$ har vi også $\langle x, z\rangle$.

b) $R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ er *kun refleksiv og transitiv*



Relasjonen er fortsatt refleksiv; vi har $\langle x, x\rangle \in R_2$ for alle elementer i universet. Vi har fortsatt transitivitet, fordi x kan være lik y, som i a). Vi har imidlertid ikke symmetri, fordi vi har $\langle 1, 2\rangle$ men ikke $\langle 2, 1\rangle$.

c) $R_3 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ er *kun refleksiv*

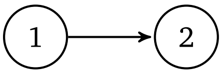


Relasjonen er refleksiv fordi vi har $\langle x, x\rangle \in R_2$ for alle elementer i universet. Vi har ikke symmetri, av samme grunn som over, men nå har vi heller ikke transitivitet; vi har $\langle 1, 2\rangle \in R_3$ og $\langle 2, 3\rangle \in R_3$, men ikke $\langle 1, 3\rangle$.

d) $R_4 = \emptyset$ er *kun symmetrisk og transitiv*

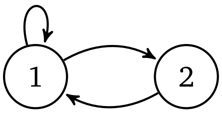
Kravene til symmetri og transitivitet er her tomt oppfylt, så disse egenskapene har vi. For refleksivitet må vi imidlertid ha $\langle x, x \rangle \in R_4$ for alle $x \in \{1, 2, 3\}$, men R_4 er tom.

e) $R_5 = \{\langle 1, 2 \rangle\}$ er *kun transitiv*



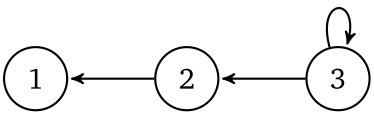
Her er kravet til transitivitet tomt oppfylt. For refleksivitet mangler vi alle elementene i R_1, for symmetri mangler vi $\langle 2, 1 \rangle$

f) $R_6 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ er *kun symmetrisk*



R_6 er symmetrisk fordi når vi har $\langle 1, 2 \rangle$ har vi også $\langle 2, 1 \rangle$, og vice versa, og når vi har $\langle 1, 1 \rangle$ har vi $\langle 1, 1 \rangle$. Vi har ikke transitivitet fordi vi har $\langle 2, 1 \rangle$ og $\langle 1, 2 \rangle$ men ikke $\langle 2, 2 \rangle$. Vi har heller ikke refleksivitet, for vi mangler $\langle 2, 2 \rangle$ og $\langle 3, 3 \rangle$

g) $R_7 = \{\langle 3, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ har *ingen av egenskapene*



Her har vi ingen av egenskapene. For refleksivitet mangler vi $\langle 2, 2 \rangle$ og $\langle 1, 1 \rangle$, for symmetri mangler vi $\langle 2, 3 \rangle$ og $\langle 1, 2 \rangle$, og for transitivitet mangler vi $\langle 3, 1 \rangle$.

Oppgave 2 (Utsagnslogikk)

Vi har $(F \to G) \to ((F \Box H) \to (G \Box H))$, der vi skal sette inn skal sette inn konnektivene $\vee, \wedge$ og $\to$ for $\Box$, for så å avgjøre gyldighet. Vi får følgende tre formler å analysere:

$$\begin{aligned} \Box = \vee: &\quad (F \to G) \to ((F \vee H) \to (G \vee H)) \\ \Box = \wedge: &\quad (F \to G) \to ((F \wedge H) \to (G \wedge H)) \\ \Box = \to: &\quad (F \to G) \to ((F \to H) \to (G \to H)) \end{aligned}$$

For at en formel F skal være gyldig må $\nu(F) = 1$ for alle valuasjoner ν. Dette tilsvarer at vi får en kolonne med bare ett-tall under formelens hovedkonnektiv, eller det konnektivet som står omgitt av færrest parenteser. En slik formel er alltid sann.

1) Gyldig

F	G	H	(F	$\to$ G)	$\to$ ((F	$\lor$ H)	$\to$ (G	$\lor$ H))
1	1	1		1	**1**	1	1	1
1	1	0		1	**1**	1	1	1
1	0	1		0	**1**	1	1	1
1	0	0		0	**1**	1	0	0
0	1	1		1	**1**	1	1	1
0	1	0		1	**1**	0	1	1
0	0	1		1	**1**	1	1	1
0	0	0		1	**1**	0	1	0

2) Gyldig

F	G	H	(F	$\to$ G)	$\to$ ((F	$\land$ H)	$\to$ (G	$\land$ H))
1	1	1		1	**1**	1	1	1
1	1	0		1	**1**	0	1	0
1	0	1		0	**1**	1	0	0
1	0	0		0	**1**	0	1	0
0	1	1		1	**1**	0	1	1
0	1	0		1	**1**	0	1	0
0	0	1		1	**1**	0	1	0
0	0	0		1	**1**	0	1	0

3) Ikke gyldig. La oss kalle den aktuelle formelen ϕ og la $v(G) = 1$ og $v(F) = v(H) = 0$. Da er $v(\phi) = 0$ som vi ser av sannhetsverditabellen under.

F	G	H	(F	$\to$ G)	$\to$ ((F	$\to$ H)	$\to$ (G	$\to$ H))
1	1	1		1	**1**	1	1	1
1	1	0		1	**1**	0	1	0
1	0	1		0	**1**	1	1	1
1	0	0		0	**1**	0	1	1
0	1	1		1	**1**	1	1	1
0	1	0		1	**0**	1	0	0
0	0	1		1	**1**	1	1	1
0	0	0		1	**1**	1	1	1

Oppgave 3 (Utsagnslogikk - Sant eller usant)

(a) *Sant*. Hvis A og B er gyldige har vi at $v(A) = 1$ og at $v(B) = 1$ for alle valuasjoner v. Ved definisjonen av valuasjon for konjunksjon ($\land$) har vi at $v(A \land B) = 1$ hviss (hvis og bare hvis) $v(B) = 1$ *og* $v(A) = 1$ for alle valuasjoner v, altså må både A og B være gyldige når konjunksjonen er det. $\square$

(b) *Usant*. Moteksempel: La $A = p$ og $B = \neg p$. Vi kan nå la $v(p) = 1$ og $v'(p) = 0$ Da er $v(A) = 1$ og $v'(B) = 1$ ved definisjonen av valuasjon for negasjon, og siden vi har en valuasjon som gjør hver av formlene sanne, er begge formlene oppfyllbare. Definisjonen av valuasjon for konjunksjon sier imidlertid at $v(A \land B) = 1$ hviss $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$. Men vi har at $v(B) = 0$ når $v(A) = 1$ og $v'(A) = 0$ når $v'(B) = 1$ ved definisjonen av valuasjon for negasjon. Dermed har vi ingen valuasjon som gjør $A \land B$ sann. $\square$

(c) *Sant*. Vi har følgende ekvivalenser:

$$\begin{aligned}
(A \land \neg B) &\Leftrightarrow (\neg\neg A \land \neg B) && (\neg\neg A = A)\\
&\Leftrightarrow \neg(\neg A \lor B) && \text{(De Morgan)}\\
&\Leftrightarrow \neg(A \to B) && (\text{def. av} \to)
\end{aligned}$$

Dermed har vi at for hver valuasjon v der $v(A \land \neg B) = 0$ vil også $v(\neg(A \to B)) = 0$ fordi de er ekvivalente, og dermed vil $v(A \to B) = 1$ ved definisjon av valuasjon av negasjon. Dersom $(A \land \neg B)$ er en kontradiksjon betyr det at $v(A \land \neg B) = 0$ for alle valuasjoner v og følgelig må $v(A \to B) = 1$ for alle valuasjoner, hvilket betyr at den er gyldig. □

(d) *Usant*. Moteksempel: La A være gyldig. Da har vi at $v(A) = 1$ for alle valuasjoner v. Kravet til oppfyllbarhet er at det må finnes minst en valuasjon slik at $v(A) = 1$, så dette kravet er innfridd. Kravet til falsifiserbarhet er at det finnes en valuasjon v slik at $v(A) = 0$, men $v(A) = 1$ for alle v, så dette kravet er ikke oppfylt. □

(e) *Sant*. Dersom B er oppfyllbar må det finnes en valuasjon v slik at $v(B) = 1$. Ved definisjonen av valuasjon for $\to$ vil vi få $v(A \to B) = v(\neg A \lor B)$ og ved definisjonen av valuasjon av disjunksjon er $v(\neg A \lor B) = 1$ når $v(\neg A) = 1$ *eller* $v(B) = 1$. Dersom B er oppfyllbar har vi altså en valuasjon, nettopp v, som også gjør $(A \to B)$ sann. Altså er $A \to B$ oppfyllbar fordi $v \models B \Rightarrow v \models (A \to B)$. □

(f) *Sant*. Vi angir eksempler på hva F, G og H kan være; mange andre eksempler kan være riktige, men det holder med ett. La

$$\begin{aligned}
F &= p \lor q\\
G &= \neg p\\
H &= \neg q
\end{aligned}$$

For at en mengde Φ av formler skal være oppfyllbar må det finnes en valuasjon v slik at $v(\phi) = 1$ for alle $\phi \in \Phi$. Vi kan nå definere en valuasjon v slik:

$$\begin{aligned}
v(p) &= 0\\
v(q) &= 1
\end{aligned}$$

Da er $v(G) = v(\neg p) = 1$ ved definisjon av valuasjon for $\neg$ og $v(p \lor q) = 1$ ved definisjon av valuasjon for $\lor$. Dermed har vi $v \models \{F, G\}$. Vi definerer nå en annen valuasjon:

$$\begin{aligned}
v'(p) &= 1\\
v'(q) &= 0
\end{aligned}$$

Da er $v'(H) = v'(\neg q) = 1$ og $v'(p \lor q) = 1$ og dermed har vi $v' \models \{F, H\}$ av samme grunn som over. Vi definerer så en tredje valuasjon:

$$\begin{aligned}
v''(p) &= 0\\
v''(q) &= 0
\end{aligned}$$

Da er $v''(G) = v''(\neg p) = 1$ og $v''(H) = v(\neg q) = 1$ og dermed har vi $v'' \models \{G, H\}$.
Da gjenstår den store mengden. Anta at vi har en valuasjon w slik at $w \models \{F, G, H\}$. Da er $w(F) = 1$ og $w(p) = w(q) = 0$ slik at $w(G) = w(H) = 1$. Men da er også $w(p \lor q) = 0$ og dermed $w(F) = 0$ ved definisjon av valuasjon for $\lor$, selv om vi har sagt at $w(F) = 1$. Dette er en selvmotsigelse, altså kan det ikke finnes en valuasjon w slik at $w \models \{F, G, H\}$ □