Øvingsoppgaver (uke 37)

INF1800 – Logikk og beregnbarhet – Høsten 2008

1 Oppgave (Valuasjoner)

Finn, for hver av formlene nedenfor, en valuasjon som falsifiserer den og en valuasjon som oppfyller den.

a. P
b. $\neg P$
c. $P \land Q$
d. $P \lor Q$
e. $P \to Q$
f. $((P \to Q) \lor (R \lor P)) \land \neg Q$

2 Oppgave (Sannhetsverditabeller)

Sett opp sannhetsverditabeller som viser følgende påstander.

a. $P \to Q$ er sann hvis og bare hvis $\neg P \lor Q$ er sann.
b. $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ er en tautologi.
c. $P \to Q$ er falsifiserbar hvis og bare hvis $P \land \neg Q$ er oppfyllbar.

3 Oppgave (Utsagnslogisk uttrykkskraft)

Uttrykk følgende setninger ved hjelp av utsagnslogikk. Representer de tre setningene som utsagnslogiske formler, og undersøk om mengden av de tre formlene er oppfyllbar, det vil si, om det er mulig at formlene kan være sanne samtidig.

a. Hvis Ola bor i Paris, så bor han i Frankrike
b. Det er ikke sant at hvis Ola bor i London, så bor han i Frankrike.
c. Det er ikke sant at hvis Ola bor i Paris, så bor han i England.

4 Oppgave (Oppfyllbarhet)

Finn ut om følgende mengder av utsagnslogiske formler er oppfyllbare. Hvis en mengde er oppfyllbar, gi en valuasjon som oppfyller mengden.

a. $\{A, \neg A\}$
b. $\{A \to B, A \to \neg B\}$
c. $\{A \to B, B \to \neg A\}$
d. $\{\neg A \to B, B \to \neg C, \neg(A \lor \neg C)\}$

5 Oppgave (Konger, damer og tigre)

En konge gir sin fange valget mellom to rom. I hvert rom er det enten en dame eller en tiger, men ikke begge deler. På utsiden av dørene står det følgende:

(1)	(2)
I MINST ETT AV DISSE ROMMENE ER DET EN DAME	I DET ANDRE ROMMET ER DET EN TIGER

Kongen sier så: "Enten så er begge påstandene sanne, eller så er begge usanne!"
Hvilken dør bør fangen velge?
(Oppgaven er hentet fra *The lady or the tiger?*, Raymond Smullyan, 1982)

6 Oppgave (Finn en formel)

Finn en formel F med utsagnsvariablene P, Q og R med så få konnektiver som mulig slik at F har følgende sannhetsverditabell.

P	Q	R	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

7 Oppgave (Sann eller usann)

For hver av påstandene nedenfor, avgjør om påstanden er sann eller usann. Vi antar at A, B og C står for utsagnslogiske formler. Hvis påstanden er sann, så gi et bevis eller forklar hvorfor det er slik. Hvis påstanden er usann, så gi et moteksempel.

a. Hvis $\neg A$ er oppfyllbar, så er A gyldig.
b. Hvis A ikke er oppfyllbar, så er $\neg A$ oppfyllbar.
c. Hvis A er oppfyllbar, så er $\neg A$ ikke oppfyllbar.
d. Hvis A ikke er en logisk konsekvens av B, så må $\neg A$ være en logisk konsekvens av B.
e. Hvis $A \rightarrow B$ er gyldig, så er $A \rightarrow (B \vee C)$ gyldig.
f. Hvis $A \rightarrow B$ er gyldig, så er $A \rightarrow (B \wedge C)$ gyldig.
g. For alle A, så er A eller $\neg A$ oppfyllbar.
h. For alle A, så er A eller $\neg A$ gyldig.
i. Hvis logikk er moro, så er logikk moro.

8 Oppgave (Normalformer)

Overfør hver av følgende formler til ekvivalente formler på DNF og CNF.

a. $P \to Q$
b. $(P \to Q) \to (Q \to R)$
c. $(P \lor Q) \land (R \land S)$
d. $(\neg P \land Q) \to R$

Forklar hva som er sammenhengen mellom DNF, CNF og sannhetsverditabeller.

9 Oppgave (Gyldighet og bevisføring 1)

Bevis følgende påstand:
For alle utsagnslogiske formler A: A er gyldig hvis og bare hvis $\{\neg A\}$ ikke er oppfyllbar.

10 Oppgave (Gyldighet og bevisføring 2)

Betrakt følgende påstander:
(a) X er sann hvis og bare hvis Y er sann.
(b) X er gyldig hvis og bare hvis Y er gyldig. Følger (a) fra (b)? Følger (b) fra (a)? Forklar.

11 Oppgave (Tre søsken)

Tre søsken, A, B og C, er i et hus, og må rette seg etter følgende regler:

i) Hvis A går ut, så må B gå ut.
ii) Hvis C går ut, så, hvis A går ut, så må B være inne.

(1) Formaliser påstandene ved hjelp av utsagnslogikk.
(2) Sjekk om det er mulig at C kan gå ut. Begrunn svaret.
(3) Gitt et språk med bare tre atomære utsagn; hvor mange ikke-ekvivalente utsagn kan du lage fra disse? Begrunn svaret skikkelig eller lag en liste over alle mulige slike utsagn.
(4) Hva er det mulig for A, B og C å gjøre?

Ekstraoppgaver

12 Oppgave (Tautologier og kontradiksjoner)

Hver formel nedenfor er enten en tautologi eller en kontradiksjon. Avgjør hvilke formler som er hva. Forklar ved hjelp av sannhetsverditabeller eller gi et semantisk argument.

a. $(\neg B \vee (C \rightarrow (A \wedge D))) \vee (B \rightarrow C)$
b. $((B \rightarrow C) \leftrightarrow D) \rightarrow ((A \wedge D) \rightarrow D)$
c. $((C \wedge (D \vee A)) \rightarrow B) \vee \neg B$
d. $B \wedge \neg((C \wedge A) \rightarrow B)$
e. $\neg(\neg C \rightarrow ((D \wedge B) \rightarrow D))$

13 Oppgave (Gyldige argumenter)

Avgjør om følgende argumenter er gyldige eller ikke. (Resonnér semantisk; ikke bruk sannhetsverditabeller.)

Premisser:	$A \vee B$
	$A \rightarrow C$
	$B \rightarrow C$
Konklusjon:	C

Premisser:	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$
	A
Konklusjon:	C

Premisser:	$(A \rightarrow B) \rightarrow C$
	B
Konklusjon:	C

14 Oppgave (Ekvivalente formler)

Avgjør hvilke av følgende formler som er ekvivalente. Forklar ved hjelp av sannhetsverditabeller eller et semantisk argument.

a. $C \vee (B \wedge C)$
b. $\neg C \rightarrow (B \wedge C)$
c. $((\neg C \vee A) \rightarrow A) \wedge A$
d. $\neg C \rightarrow ((D \wedge C) \wedge C)$
e. $\neg((\neg B \rightarrow (A \vee B)) \leftrightarrow \neg A)$