INF1800 – Logikk og beregnbarhet

Forelesning 15: Utsagnslogikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

7. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-07 21:00)

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

Introduksjonseksempel

Introduksjonseksempel

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?

Introduksjonseksempel

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.

Introduksjonseksempel

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\vdash \ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:

$$\frac{P \rightarrow Q \;\vdash}{\vdash\; (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$:
  - oppfylle $P \rightarrow Q$,

$$\frac{P \rightarrow Q \ \vdash \ \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash \ (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$:
  - oppfylle $P \rightarrow Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$.

$$\frac{P \rightarrow Q \ \vdash \ \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash \ (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$:
  - oppfylle $P \rightarrow Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$.
- Formler til *venstre* for $\vdash$ skal *oppfylles*.

$$\frac{P \to Q \ \vdash \ \neg Q \to \neg P}{\vdash \ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \to \neg P$.
- Formler til *venstre* for $\vdash$ skal *oppfylles*.
- Formler til *høyre* for $\vdash$ skal *falsifiseres*.

$$\dfrac{P \to Q \;\vdash\; \neg Q \to \neg P}{\vdash\; (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:

$$\cfrac{\cfrac{\vdash P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P \qquad\qquad Q \vdash}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \rightarrow Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P \qquad\qquad Q \vdash}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.
- $\neg Q \to \neg P$ må kunne falsifiseres uavhengig av hvordan $P \to Q$ oppfylles.

$$\dfrac{\dfrac{\vdash\ P, \neg Q \to \neg P \qquad\qquad Q \ \vdash\ \neg Q \to \neg P}{P \to Q \ \vdash\ \neg Q \to \neg P}}{\vdash\ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.
- $\neg Q \to \neg P$ må kunne falsifiseres uavhengig av hvordan $P \to Q$ oppfylles.
- Formelen kopieres derfor inn i begge de nye løvnodene.

$$\cfrac{\cfrac{\vdash\ P, \neg Q \to \neg P \qquad\qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\color{red}{\neg Q} \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \ \vdash\ \neg P, P}{\vdash\ P, \neg Q \to \neg P} \qquad Q \ \vdash\ \neg Q \to \neg P}{P \to Q \ \vdash\ \neg Q \to \neg P}}{\vdash\ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i høyre løvnode:

$$\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\dfrac{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i høyre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
    - oppfylle $\neg Q$,
    - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i høyre løvnode:
    - oppfylle $\neg Q$,
    - *og* falsifisere $\neg P$.

$$
\dfrac{
  \dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}
  \qquad
  \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}
}{
  \dfrac{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, {\color{red}P} \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.
- Oppfylle $\neg Q$ i høyre løvnode:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash {\color{red}Q}, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.
- Oppfylle $\neg Q$ i høyre løvnode:
  - falsifisere Q.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \;\vdash\; P}{\neg Q \;\vdash\; \neg P, P}}{\vdash\; P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \;\vdash\; Q, \neg P}{Q, \neg Q \;\vdash\; \neg P}}{Q \;\vdash\; \neg Q \to \neg P}}{\dfrac{P \to Q \;\vdash\; \neg Q \to \neg P}{\vdash\; (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}
  }{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}
  }{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}
}{
  \dfrac{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}
}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.

$$
\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \cfrac{\cfrac{\color{red}{Q} \vdash \color{red}{Q}, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!
- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Noen kommentarer

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.
- Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.
- Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder.

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.
- Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder.
- Et slikt objekt kalles en utledning.

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.
- Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder.
- Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av $\vdash$.

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.
- Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder.
- Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av $\vdash$.
- En utledning med denne egenskapen kalles et bevis.

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.
- Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder.
- Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av $\vdash$.
- En utledning med denne egenskapen kalles et bevis.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventer og aksiomer

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Notasjon

I sekventer leses , som union (kalles *sum* i boken):

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Notasjon

I sekventer leses $\,,\,$ som union (kalles *sum* i boken):

- Γ, A skal bety $\Gamma + \{A\}$.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Notasjon

I sekventer leses $\,,\,$ som union (kalles *sum* i boken):

- Γ, A skal bety $\Gamma + \{A\}$.
- Hvis $\Gamma = [A, B, C]$, så er $\Gamma, A = [A, A, B, C]$.

Sekventer og aksiomer

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$ `Ja`

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$ `Ja`
- $\vdash Q$

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$ `Ja`
- $\vdash Q$ `Ja`

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$ `Ja`
- $\vdash Q$ `Ja`
- $P \vdash$

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q Nei
- $\vdash P \vdash Q$ Nei
- $P \vdash Q$ Ja
- $P, P \vdash Q$ Ja
- $\vdash Q$ Ja
- $P \vdash$ Ja

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$ `Ja`
- $\vdash Q$ `Ja`
- $P \vdash$ `Ja`
- $23 \vdash Q$

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$ `Ja`
- $\vdash Q$ `Ja`
- $P \vdash$ `Ja`
- $23 \vdash Q$ `Nei`

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$ `Ja`
- $\vdash Q$ `Ja`
- $P \vdash$ `Ja`
- $23 \vdash Q$ `Nei`
- $P, Q \to R \vdash Q \to R$

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$ `Ja`
- $\vdash Q$ `Ja`
- $P \vdash$ `Ja`
- $23 \vdash Q$ `Nei`
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$ `Ja`

Sekventer og aksiomer

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $P \vdash Q$

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $\mathsf{P} \vdash \mathsf{Q}$ `Nei`

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $P \vdash Q$ `Nei`
- $P, P \vdash Q, P$

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $\mathrm{P} \vdash \mathrm{Q}$ `Nei`
- $\mathrm{P}, \mathrm{P} \vdash \mathrm{Q}, \mathrm{P}$ `Ja`

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $\mathrm{P} \vdash \mathrm{Q}$ `Nei`
- $\mathrm{P}, \mathrm{P} \vdash \mathrm{Q}, \mathrm{P}$ `Ja`
- $\mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q} \vdash \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $\mathsf{P} \vdash \mathsf{Q}$ `Nei`
- $\mathsf{P}, \mathsf{P} \vdash \mathsf{Q}, \mathsf{P}$ `Ja`
- $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q} \vdash \mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$ `Nei`

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $\mathsf{P} \vdash \mathsf{Q}$ Nei
- $\mathsf{P}, \mathsf{P} \vdash \mathsf{Q}, \mathsf{P}$ Ja
- $\mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q} \vdash \mathsf{P} \rightarrow \mathsf{Q}$ Nei
- $\mathsf{P}, \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R} \vdash \mathsf{Q} \rightarrow \mathsf{R}, \mathsf{P}$

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $\mathsf{P} \vdash \mathsf{Q}$ `Nei`
- $\mathsf{P}, \mathsf{P} \vdash \mathsf{Q}, \mathsf{P}$ `Ja`
- $\mathsf{P} \to \mathsf{Q} \vdash \mathsf{P} \to \mathsf{Q}$ `Nei`
- $\mathsf{P}, \mathsf{Q} \to \mathsf{R} \vdash \mathsf{Q} \to \mathsf{R}, \mathsf{P}$ `Ja`

Sekventkalkyleregler

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A \;,\; B \;\vdash\; \Delta}{\Gamma, A \wedge B \;\vdash\; \Delta}\ \mathsf{L}\wedge$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \ \vdash\ \Delta}{\Gamma, A \land B \ \vdash\ \Delta}\ \mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma\ \vdash\ A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma\ \vdash\ A \lor B, \Delta}\ \mathsf{R}\lor$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ \mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \mathsf{R}\rightarrow$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ \mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \mathsf{R}\rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\neg$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \ \vdash\ \Delta}{\Gamma, A \land B \ \vdash\ \Delta}\ \mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \ \vdash\ A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma \ \vdash\ A \lor B, \Delta}\ \mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash\ B, \Delta}{\Gamma \ \vdash\ A \rightarrow B, \Delta}\ \mathsf{R}\!\rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \ \vdash\ A, \Delta}{\Gamma, \neg A \ \vdash\ \Delta}\ \mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \ \vdash\ \Delta}{\Gamma \ \vdash\ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ \mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \mathsf{R}\to$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

α-reglene kalles ofte ett-premissregler.

Sekventkalkyleregler

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β-regler)

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\,\mathsf{R}\land$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \mathsf{R}\wedge$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\to$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta} \; \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\to$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\rightarrow$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\!\to$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Slutningsreglene i sekventkalkylen LK er α- og β-reglene.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\;\mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta} \, \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Slutninger

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \ \vdash\ \Delta}{\Gamma \ \vdash\ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\dfrac{P \ \vdash}{\vdash \ \neg P}$$

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \ \vdash}{\vdash \ \neg P} \qquad \frac{Q, P \ \vdash}{Q \ \vdash \ \neg P}$$

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \;\vdash\; \Delta}{\Gamma \;\vdash\; \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \;\vdash}{\vdash\; \neg P} \qquad \frac{Q, P \;\vdash}{Q \;\vdash\; \neg P} \qquad \frac{Q \to R, P \;\vdash\; P}{Q \to R \;\vdash\; \neg P, P}$$

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \ \vdash}{\vdash \ \neg P} \qquad \frac{Q, P \ \vdash}{Q \ \vdash \ \neg P} \qquad \frac{Q \rightarrow R, P \ \vdash \ P}{Q \rightarrow R \ \vdash \ \neg P, P} \qquad \ldots$$

Begreper knyttet til slutninger

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}\ \mathsf{L}\vee$$

Begreper knyttet til slutninger

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\dfrac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.

Begreper knyttet til slutninger

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\dfrac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.

Begreper knyttet til slutninger

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\dfrac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.

Begreper knyttet til slutninger

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\dfrac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.
- Formlene P og R i premissene er aktive formler.

Begreper knyttet til slutninger

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.
- Formlene P og R i premissene er aktive formler.
- De andre formlene er ekstraformler.

Utledninger

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

Utledninger

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$

Utledninger

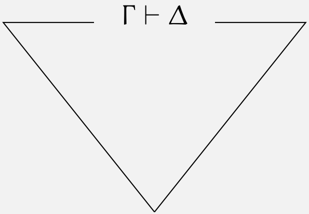
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

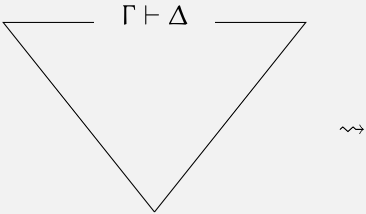
Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

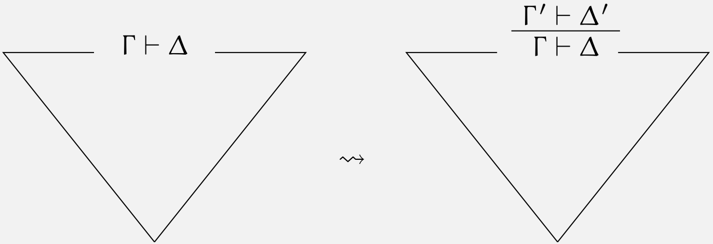
Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$

Utledninger

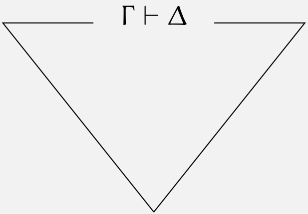
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

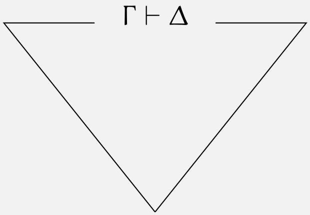
Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.

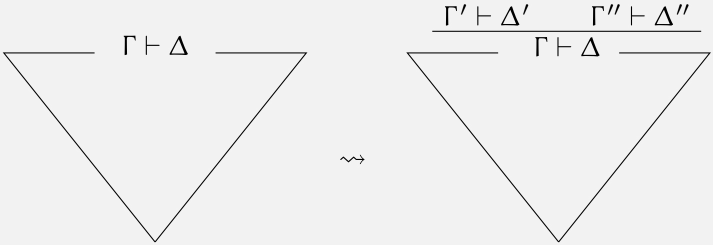


$\rightsquigarrow$

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

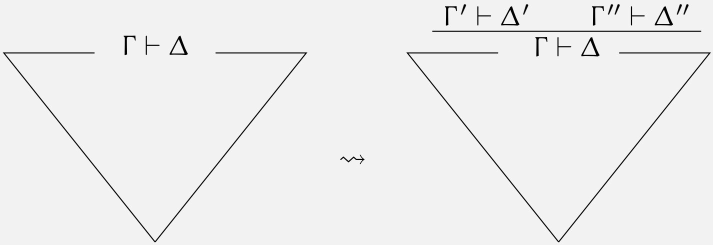
Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



β-utvidelse gir forgrening i utledningen!

Utledninger

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \lor Q$

$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

$\vdash P \rightarrow Q$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \vee Q$

$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

$\vdash P \rightarrow Q$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \vee Q$ $\qquad$ $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

$$\dfrac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; \color{red}{P \to Q}}\ \mathsf{R}{\to}$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad\qquad \vdash\; P \land P$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\frac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \vdash\; P \land P$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash\ Q}{\vdash\ P \to Q}\ \mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash\ P \qquad\qquad \vdash\ P}{\vdash\ {\color{red}P \land P}}\ \mathsf{R}{\land}$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash \ Q}{\vdash \ P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash \ P \qquad\qquad \vdash \ P}{\vdash \ P \land P}\,\mathsf{R}{\land}$$

$$P \lor Q \ \vdash \ P \land Q$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathsf{R}{\land}$$

$$\color{red}{P \lor Q} \vdash P \land Q$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathsf{R}{\land}$$

$$\dfrac{P \vdash P \land Q \qquad\qquad Q \vdash P \land Q}{\color{red}{P \lor Q} \vdash P \land Q}\,\mathsf{L}{\lor}$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\frac{P \ \vdash \ Q}{\vdash \ P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \frac{\vdash \ P \qquad\qquad \vdash \ P}{\vdash \ P \land P}\,\mathsf{R}{\land}$$

$$\frac{P \ \vdash \ \color{red}{P \land Q} \qquad\qquad\qquad Q \ \vdash \ P \land Q}{P \lor Q \ \vdash \ P \land Q}\,\mathsf{L}{\lor}$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash\; P \qquad\qquad \vdash\; P}{\vdash\; P \land P}\,\mathsf{R}{\land}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \;\vdash\; P \qquad\qquad P \;\vdash\; Q}{P \;\vdash\; \color{red}{P \land Q}}\,\mathsf{R}{\land} \qquad\qquad Q \;\vdash\; P \land Q}{P \lor Q \;\vdash\; P \land Q}\,\mathsf{L}{\lor}$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathsf{R}{\land}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \land Q}\,\mathsf{R}{\land} \qquad Q \vdash \color{red}{P \land Q}}{P \lor Q \vdash P \land Q}\,\mathsf{L}{\lor}$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathsf{R}\land$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \land Q}\,\mathsf{R}\land \qquad \dfrac{Q \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q \vdash {\color{red}P \land Q}}\,\mathsf{R}\land}{P \lor Q \vdash P \land Q}\,\mathsf{L}\lor$$

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash\; P \qquad\qquad \vdash\; P}{\vdash\; P \land P}\,\mathsf{R}\land$$

$$\dfrac{\dfrac{P \;\vdash\; P \qquad P \;\vdash\; Q}{P \;\vdash\; P \land Q}\,\mathsf{R}\land \qquad \dfrac{Q \;\vdash\; P \qquad Q \;\vdash\; Q}{Q \;\vdash\; P \land Q}\,\mathsf{R}\land}{P \lor Q \;\vdash\; P \land Q}\,\mathsf{L}\lor$$

Bevis

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det fins et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Bevis

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\vdash \; P \rightarrow P$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\vdash \; P \rightarrow P$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{P \;\vdash\; P}{\;\vdash\; P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\color{red}{P} \;\vdash\; \color{red}{P}}{\vdash\; P \rightarrow P}\; \mathsf{R}{\rightarrow}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\,\mathsf{R}{\to}$$

$$P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\; R\!\rightarrow$$

$$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P \qquad\qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\color{red}{P \rightarrow Q}\color{black}{} \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\vdash P, {\color{red}\neg Q \rightarrow \neg P} \qquad\qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\begin{array}{c}\times \\ P \vdash P\end{array}}{\vdash P \to P}\;\mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{R}{\to} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{L}{\to}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\cfrac{\cfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathsf{R}{\to}$$

$$\cfrac{\cfrac{\neg Q \vdash \color{red}{\neg P}\color{black}{}, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\begin{array}{c}\times\\ \dfrac{P \vdash P}{\vdash P \to P}\,\mathsf{R}{\to}\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash {\color{red}\neg P}, P}\,\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{L}{\to}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{R}{\rightarrow} \qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\,\mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\color{red}{\times}}{\neg Q, \color{red}{P} \vdash \color{red}{P}}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\,\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{L}{\to}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \;\vdash\; P}}{\vdash\; P \rightarrow P}\;\mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \;\vdash\; P}}{\neg Q \;\vdash\; \neg P, P}\;\mathsf{R}\neg}{\vdash\; P, \neg Q \rightarrow \neg P}\;\mathsf{R}{\rightarrow} \qquad Q \;\vdash\; \color{red}{\neg Q \rightarrow \neg P}}{P \rightarrow Q \;\vdash\; \neg Q \rightarrow \neg P}\;\mathsf{L}{\rightarrow}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\,\mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\,\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{L}{\to}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{R}{\rightarrow} \qquad \dfrac{Q, \color{red}{\neg Q} \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \;\vdash\; P}}{\vdash\; P \to P}\ \mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \;\vdash\; P}}{\neg Q \;\vdash\; \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash\; P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \;\vdash\; Q, \neg P}{Q, {\color{red}\neg Q} \;\vdash\; \neg P}\ \mathsf{L}\neg}{Q \;\vdash\; \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to}}{P \to Q \;\vdash\; \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{{\color{red}Q} \vdash {\color{red}Q}, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\ \mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\;\mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\;\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\;\mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\;\mathsf{L}{\to}$$

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\,\mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\,\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\,\mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{L}{\to}$$

- Sekventene $\vdash P \to P$ og $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ er bevisbare, siden det fins LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \ \vdash\ P}}{\vdash\ P \to P}\ \mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \ \vdash\ P}}{\neg Q \ \vdash\ \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash\ P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \ \vdash\ Q, \neg P}}{Q, \neg Q \ \vdash\ \neg P}\ \mathsf{L}\neg}{Q \ \vdash\ \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to}}{P \to Q \ \vdash\ \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}$$

- Sekventene $\vdash P \to P$ og $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ er bevisbare, siden det fins LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Merk: symbolet $\times$ er ikke en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Gyldige sekventer

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \vdash P, Q$

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \vdash P, Q$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \vdash P, Q$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \vdash P, Q$
- $P \to Q \vdash P \to Q$
- $P, P \to Q \vdash Q$
- $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

Falsifiserbare sekventer

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$ Motmodell: alle modeller!

Oppsummering

Oppsummering

Gyldig

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \qquad \dfrac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \to Q \vdash \neg Q}$$