INF1800 – Forelesning 15

Utsagnslogikk

Roger Antonsen - 7. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-07 20:59)

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

Introduksjonseksempel

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\neg Q, P \vdash P$}
\UnaryInfC{$\neg Q \vdash \neg P, P$}
\UnaryInfC{$\vdash P, \neg Q \to \neg P$}
\AxiomC{$Q \vdash Q, \neg P$}
\UnaryInfC{$Q, \neg Q \vdash \neg P$}
\UnaryInfC{$Q \vdash \neg Q \to \neg P$}
\BinaryInfC{$P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$}
\UnaryInfC{$\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$}
\end{prooftree}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \to \neg P$.
- *Formler til* venstre *for* $\vdash$ *skal* oppfylles.
- *Formler til* høyre *for* $\vdash$ *skal* falsifiseres.
- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.
- $\neg Q \to \neg P$ må kunne falsifiseres uavhengig av hvordan $P \to Q$ oppfylles.
- Formelen kopieres derfor inn i begge de nye løvnodene.
- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i høyre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.
- Oppfylle $\neg Q$ i høyre løvnode:

  - falsifisere Q.
- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P.   Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q.   Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!
- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for *sekventer*.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.
- Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av *regler*.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder.
- Et slikt objekt kalles en *utledning*.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av $\vdash$.
- En utledning med denne egenskapen kalles et *bevis*.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Sekvent).
En *sekvent* er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles *antecedent*.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles *succedent*.

Notasjon.
I sekventer leses $,$ som union (kalles *sum* i boken):

- Γ, A skal bety $\Gamma + \{A\}$.
- Hvis $\Gamma = [A, B, C]$, så er $\Gamma, A = [A, A, B, C]$.

Eksempel.
Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q `Nei`
- $\vdash P \vdash Q$ `Nei`
- $P \vdash Q$ `Ja`
- $P, P \vdash Q$ `Ja`
- $\vdash Q$ `Ja`
- $P \vdash$ `Ja`
- $23 \vdash Q$ `Nei`
- $P, Q \to R \vdash Q \to R$ `Ja`

Definisjon (Aksiom).
Et *aksiom* er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel.
Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $P \vdash Q$ `Nei`
- $P, P \vdash Q, P$ `Ja`
- $P \to Q \vdash P \to Q$ `Nei`
- $P, Q \to R \vdash Q \to R, P$ `Ja`

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler).
α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\ \mathsf{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\ \mathsf{R}\to$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

α-reglene kalles ofte *ett-premissregler*.

Definisjon (β-regler).
β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathsf{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\to$$

β-reglene kalles ofte *to-premissregler*.

Definisjon (Slutningsreglene i LK).
Slutningsreglene i sekventkalkylen LK er α- og β-reglene.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
- Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
- Teksten til høyre for streken er regelens *navn*.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles *hovedformel*.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles *aktive formler*.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles *ekstraformler*.

Slutninger

Definisjon (LK**-slutning).**
- En *slutning* er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-*slutninger*.

Eksempel.
En regel $\frac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \ \vdash}{\vdash \ \neg P} \qquad \frac{Q, P \ \vdash}{Q \ \vdash \ \neg P} \qquad \frac{Q \to R, P \ \vdash \ P}{Q \to R \ \vdash \ \neg P, P} \qquad \cdots$$

Begreper knyttet til slutninger

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
- Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er *hovedformel*.
- Formlene P og R i premissene er *aktive formler*.
- De andre formlene er *ekstraformler*.

Utledninger

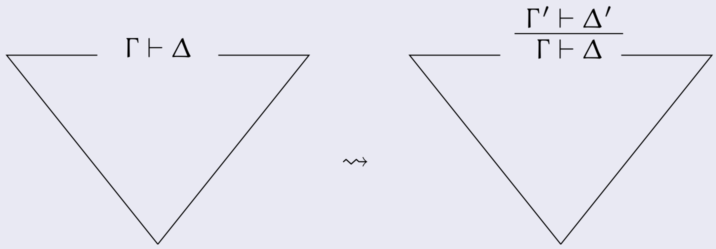
- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles *rotsekvent*.
- Løvnodene kalles *løvsekventer*.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle).
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-*utledning*.

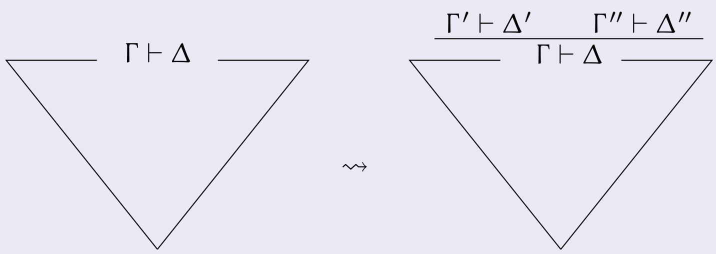
$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse).
Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-*utledning*.



Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse).
Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-*utledning*.



β-utvidelse gir forgrening i utledningen!

Eksempel (LK**-utledninger).**

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathsf{R}{\to} \qquad\qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathsf{R}{\land}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \land Q}\,\mathsf{R}{\land} \qquad \dfrac{Q \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q \vdash P \land Q}\,\mathsf{R}{\land}}{P \lor Q \vdash P \land Q}\,\mathsf{L}{\lor}$$

Bevis

Definisjon (LK**-bevis).**
Et LK-*bevis* er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK**-bevisbar).**
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-*bevisbar* hvis det fins et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Eksempel (LK**-bevis).**

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\,\mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\,\mathsf{R}{\neg}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\,\mathsf{L}{\neg}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,\mathsf{L}{\to}$$

- Sekventene $\vdash P \to P$ og $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ er bevisbare, siden det fins LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Merk: symbolet $\times$ er *ikke* en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent).
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er *gyldig* hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel.
Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \vdash P, Q$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent).

- En valuasjon v er en *motmodell* til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent *falsifiserer* sekventen.
- En sekvent er *falsifiserbar* hvis den har en motmodell.

Eksempel.
Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$ Motmodell: *alle modeller!*

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\frac{\dfrac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \qquad \dfrac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \to Q \vdash \neg Q}$$