INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 15: UTSAGNSLOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

7. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-07 20:59)

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

Introduksjonseksempel

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!
- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\ldots \vdash \ldots$. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.
- Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder.
- Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av $\vdash$.
- En utledning med denne egenskapen kalles et bevis.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for $\vdash$ kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for $\vdash$ kalles succedent.

Notasjon

I sekventer leses $\;,\;$ som union (kalles *sum* i boken):

- Γ, A skal bety $\Gamma + \{A\}$.
- Hvis $\Gamma = [A, B, C]$, så er $\Gamma, A = [A, A, B, C]$.

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q Nei
- $\vdash P \vdash Q$ Nei
- $P \vdash Q$ Ja
- $P, P \vdash Q$ Ja
- $\vdash Q$ Ja
- $P \vdash$ Ja
- $23 \vdash Q$ Nei
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$ Ja

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $P \vdash Q$ Nei
- $P, P \vdash Q, P$ Ja
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$ Nei
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$ Ja

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\mathsf{R}\vee$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\,\mathsf{R}\rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$$

α-reglene kalles ofte ett-premissregler.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\,\mathsf{R}\wedge$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\rightarrow$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Slutningsreglene i sekventkalkylen LK er α- og β-reglene.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\vee$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En slutning er en *instans* av en regel hvor
  - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
  - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.

Eksempel

En regel $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$ definerer uendelig mange $\mathsf{R}\neg$-slutninger:

$$\frac{P \vdash}{\vdash \neg P} \qquad \frac{Q, P \vdash}{Q \vdash \neg P} \qquad \frac{Q \rightarrow R, P \vdash P}{Q \rightarrow R \vdash \neg P, P} \qquad \ldots$$

Begreper knyttet til slutninger

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\, L\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.
- Formlene P og R i premissene er aktive formler.
- De andre formlene er ekstraformler.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

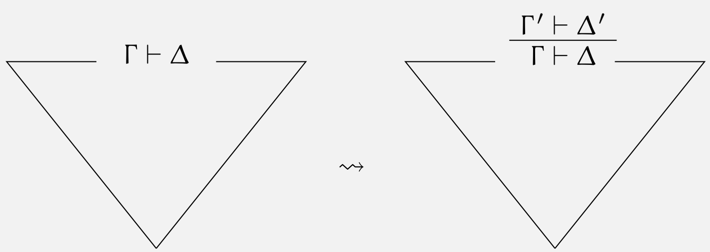
$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

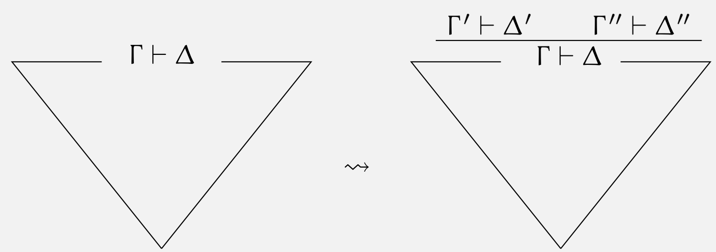
Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β-slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



β-utvidelse gir forgrening i utledningen!

Utledninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,R{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,R{\land}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash P \qquad P \vdash Q}{P \vdash P \land Q}\,R{\land} \qquad \dfrac{Q \vdash P \qquad Q \vdash Q}{Q \vdash P \land Q}\,R{\land}}{P \lor Q \vdash P \land Q}\,L{\lor}$$

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det fins et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\,R{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\,R{\neg}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\,R{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\,L{\neg}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,R{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\,L{\to}$$

- Sekventene $\vdash P \to P$ og $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ er bevisbare, siden det fins LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Merk: symbolet $\times$ er ikke en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \vdash P, Q$
- $P \to Q \vdash P \to Q$
- $P, P \to Q \vdash Q$
- $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.
- En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$ Motmodell: alle modeller!

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{P \vdash P \qquad Q \vdash Q}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \qquad \dfrac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \to Q \vdash \neg Q}$$