



INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 15: UTSAGNSLOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

7. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-07 20:59)

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

Introduksjonseksempel

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en **tautologi**?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P} \qquad \frac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P} \\
 \frac{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad \frac{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} \\
 \frac{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}
 \end{array}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
 - Oppfylle: $\neg Q, P$. Falsifisere: P .
 - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P !
- Høyre løvnode:
 - Oppfylle: Q . Falsifisere: $Q, \neg P$.
 - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q !
- $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Noen kommentarer

- Vi arbeidet med objekter av typen $\dots \vdash \dots$. Slike objekter kaller vi for **sekventer**.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende.
- Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av **regler**.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder.
- Et slikt objekt kalles en **utledning**.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sider av \vdash .
- En utledning med denne egenskapen kalles et **bevis**.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Sekvent)

En **sekvent** er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av utsagnslogiske formler.

- Formlene som står til venstre for \vdash kalles **antecedent**.
- Formlene som står til høyre for \vdash kalles **succedent**.

Notasjon

I sekventer leses Γ, A som union (kalles *sum* i boken):

- Γ, A skal bety $\Gamma + \{A\}$.
- Hvis $\Gamma = [A, B, C]$, så er $\Gamma, A = [A, A, B, C]$.

Sekventer og aksiomer

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- P, Q **Nei**
- $\vdash P \vdash Q$ **Nei**
- $P \vdash Q$ **Ja**
- $P, P \vdash Q$ **Ja**
- $\vdash Q$ **Ja**
- $P \vdash$ **Ja**
- $23 \vdash Q$ **Nei**
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$ **Ja**

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Aksiom)

Et **aksiom** er en sekvent på formen

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

slik at A er en *atomær* utsagnslogisk formel, dvs. en *utsagnsvariabel*.

Eksempel

Hvilke av sekventene nedenfor er aksiomer?

- $P \vdash Q$ **Nei**
- $P, P \vdash Q, P$ **Ja**
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$ **Nei**
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$ **Ja**

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α -regler)

α -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma, A, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta} L\wedge$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} R\vee$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \quad B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} R\rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta} L\neg$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \quad \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$$

α -reglene kalles ofte **ett-premissregler**.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (β -regler)

β -reglene i sekventkalkylen LK er:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} R\wedge$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} L\vee$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

β -reglene kalles ofte **to-premissregler**.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Slutningsreglene i sekventkalkylen LK er α - og β -reglene.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \text{L}\vee$$

- Sekventene **over** streken kalles **premisser**.
- Sekventen **under** streken kalles **konklusjon**.
- Teksten til høyre for streken er regelens **navn**.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles **hovedformel**.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles **aktive formler**.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles **ekstraformler**.

Slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- En **slutning** er en *instans* av en regel hvor
 - A og B er erstattet med utsagnslogiske formler, og
 - Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler.
- Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles **θ -slutninger**.

Eksempel

En regel $\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R_{\neg}$ definerer uendelig mange R_{\neg} -slutninger:

$$\frac{P \vdash}{\vdash \neg P} \quad \frac{Q, P \vdash}{Q \vdash \neg P} \quad \frac{Q \rightarrow R, P \vdash P}{Q \rightarrow R \vdash \neg P, P} \quad \dots$$

Begreper knyttet til slutninger

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \quad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q} \text{LV}$$

- Sekventene **over** streken kalles **premisser**.
- Sekventen **under** streken kalles **konklusjon**.
- Formelen $P \vee R$ i konklusjonen er **hovedformel**.
- Formlene P og R i premissene er **aktive formler**.
- De andre formlene er **ekstraformler**.

Utleddninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles **rotsekvent**.
- Løvnodene kalles **løvsekventer**.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en **LK-utledning**.

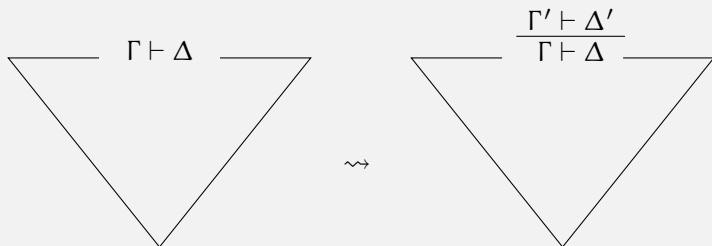
$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

Utleddninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α -utvidelse)

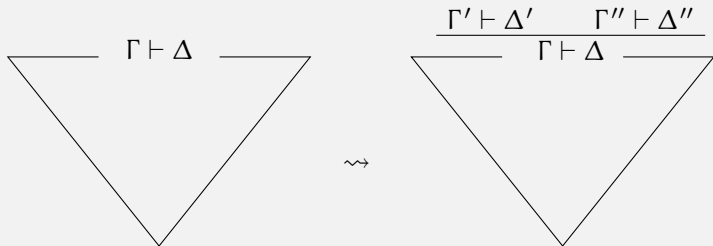
Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en α -slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



Utledninger

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β -utvidelse)

Hvis det fins en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en β -slutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en **LK-utledning**.



β -utvidelse gir forgrening i utledningen!

Utleddninger

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q$$
$$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$
$$\frac{P \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q} R \rightarrow$$
$$\frac{\vdash P \quad \vdash P}{\vdash P \wedge P} R \wedge$$
$$\frac{P \vdash P \quad P \vdash Q}{P \vdash P \wedge Q} R \wedge$$
$$\frac{Q \vdash P \quad Q \vdash Q}{Q \vdash P \wedge Q} R \wedge$$
$$\frac{P \vdash P \wedge Q \quad Q \vdash P \wedge Q}{P \vee Q \vdash P \wedge Q} LV$$

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **LK-bevisbar** hvis det fins et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Bevis

Eksempel (LK-bevis)

$$\frac{\frac{\frac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P} R_{\rightarrow}}{\frac{\frac{\frac{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P} R_{\neg} \quad \frac{\frac{\frac{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P} L_{\neg}}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} R_{\rightarrow}}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P} L_{\rightarrow}} R_{\rightarrow}$$

- Sekventene $\vdash P \rightarrow P$ og $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ er bevisbare, siden det fins LK-bevis med disse sekventene som rotsekvent.

Merk: symbolet \times er **ikke** en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.

Semantikk for sekventer

Gyldige sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **gyldig** hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ .

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \vdash P, Q$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

Falsifiserbare sekventer

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- En valuasjon v er en **motmodell** til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- Vi sier at en motmodell til en sekvent **falsifiserer** sekventen.
- En sekvent er **falsifiserbar** hvis den har en motmodell.

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ Motmodell: som over eller $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ Motmodell: $v(P) = \mathbf{1}$
- \vdash Motmodell: **alle modeller!**

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\frac{P \vdash P \quad Q \vdash Q}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\frac{\frac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \quad \frac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q}$$