

INF1800 – Forelesning 16

Utsagnslogikk – Sekventkalkyle

Roger Antonsen - 8. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-09 01:01)

Noen kommentarer

Forelesningene, notatene og boken

- Jeg sier stor sett mye mer i timen enn det som står i forelesningsnotatene.
- Derfor: for å få fullt utbytte av undervisningen, så holder det ikke å *kun* lese notatene.
- Kalkylen for utsagnslogikk kan leses helt uavhengig av boken.
- Boka kan allikevel godt leses som et supplement til det vi gjør her.
- Finner dere feil i notatene, så si ifra.
- Noen oppfordringer:
 - Regn oppgaver!
 - Gå på gruppetimene!
 - Vær nysgjerrig!
 - Repetér begrepene!

Eksempel på et bevis

$$\frac{\frac{\frac{\times}{A, B \vdash A} \quad \frac{\times}{A, B \vdash B}}{A, B \vdash A \wedge B}}{\neg(A \wedge B), A, B \vdash} \quad \frac{\times}{\neg(A \wedge B), A \vdash \neg B}}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A, \neg B} \quad \frac{\times}{\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B}$$

Eksempel på en utledning som ikke er et bevis

$$\frac{\frac{\times}{A \vdash B \wedge C, A} \quad \frac{\frac{\times}{B, A \vdash B} \quad B, A \vdash C}{B, A \vdash B \wedge C}}{A \rightarrow B, A \vdash B \wedge C}}{A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B \wedge C}$$

- Rotsekventen er falsifiserbar!
- Vi kan lese ut en motmodell fra løvsekventen som ikke er lukket.
- Motmodellen er en valuasjon v slik at $v(A) = 1$, $v(B) = 1$ og $v(C) = 0$.

Sunnhet av sekventkalkyle

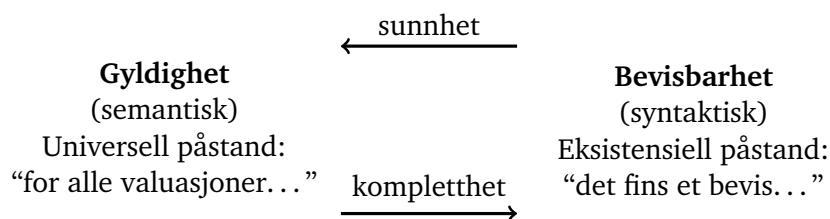
Introduksjon

Definisjon (Sunnhet).

Sekventkalkylen LK er *sunn* hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Definisjon (Kompletthet).

Sekventkalkylen LK er *komplett* hvis enhver gyldig sekvent er LK-bevisbar.



Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ gyldig

Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar

Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
 - Da vises for lite.
 - Eksempel med primtall: 2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
 - Da vises for mye.
 - Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ...
- Vi ønsker begge deler
 - Hverken for mye eller for lite.
 - Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...