

INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 16: UTSAGNSLOGIKK – SEKVENTKALKYLE

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

8. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-09 01:01)

Noen kommentarer

Forelesningene, notatene og boken

- Jeg sier stor sett mye mer i timen enn det som står i forelesningsnotatene.
- Derfor: for å få fullt utbytte av undervisningen, så holder det ikke å *kun* lese notatene.
- Kalkylen for utsagnslogikk kan leses helt uavhengig av boken.
- Boka kan allikevel godt leses som et supplement til det vi gjør her.
- Finner dere feil i notatene, så si ifra.
- Noen oppfordringer:
 - Regn oppgaver!
 - Gå på gruppetimene!
 - Vær nysgjerrig!
 - Repetér begrepe!

Viktige begreper fra forrige forelesning

- sekventer
- aksiomer
- regler
- slutninger
- premiss
- konklusjon
- utledning
- bevis
- sekventkalkyle
- gyldighet av sekvent
- falsifiserbarhet av sekvent

Eksempel på et bevis

$$\begin{array}{c}
 \times \qquad \qquad \times \\
 \frac{A, B \vdash A \quad A, B \vdash B}{A, B \vdash A \wedge B} \\
 \hline
 \neg(A \wedge B), A, B \vdash \\
 \hline
 \neg(A \wedge B), A \vdash \neg B \\
 \hline
 \neg(A \wedge B) \vdash \neg A, \neg B \\
 \hline
 \neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B
 \end{array}$$

Eksempel på en utledning som ikke er et bevis

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\times \quad \frac{B, A \vdash B \quad B, A \vdash C}{B, A \vdash B \wedge C}}{A \vdash B \wedge C, A} \\
 \hline
 A \rightarrow B, A \vdash B \wedge C \\
 \hline
 A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B \wedge C
 \end{array}$$

- Rotsekventen er falsifiserbar!
- Vi kan lese ut en motmodell fra løvsekventen som ikke er lukket.
- Motmodellen er en valuasjon v slik at $v(A) = \mathbf{1}$, $v(B) = \mathbf{1}$ og $v(C) = \mathbf{0}$.

Sunnhet av sekventkalkyle

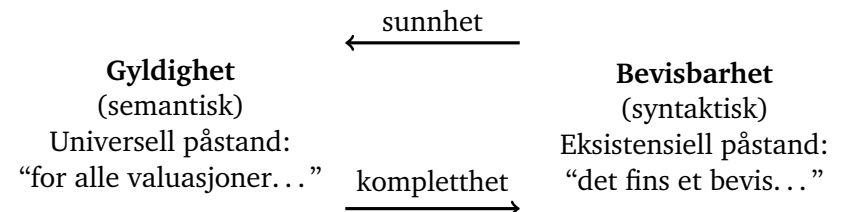
Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK er **sunn** hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK er **komplett** hvis enhver gyldig sekvent er LK-bevisbar.



Introduksjon

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ gyldig

Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

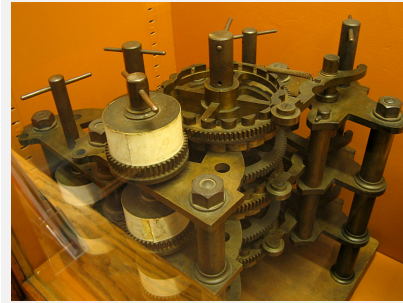
- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar

Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar

Introduksjon

En LK-maskin?



Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
 - Da vises for lite.
 - Eksempel med primtall: 2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
 - Da vises for mye.
 - Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ...
- Vi ønsker begge deler
 - Hverken for mye eller for lite.
 - Eksempel med primtall: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...