INF1800 – Logikk og beregnbarhet

Forelesning 16x: Utsagnslogikk – Sunnhetsteoremet

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

8. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-09 01:03)

Bevis for sunnhetsteoremet

Sunnhet av LK

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK ukorrekt eller usunn . . .

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK ukorrekt eller usunn ...

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK er sunn hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK ukorrekt eller usunn ...

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK er sunn hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem

Sekventkalkylen LK er sunn.

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en korrekt kalkyle.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevaring av falsifiserbarhet

Definisjon

En LK-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en θ-slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.

Bevaring av falsifiserbarhet

Definisjon

En LK-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en θ-slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevaring av falsifiserbarhet

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.

Bevaring av falsifiserbarhet

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L$\rightarrow$-regelen:

Bevaring av falsifiserbarhet

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L$\rightarrow$-regelen:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

Bevaring av falsifiserbarhet

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L→-regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- I delbeviset for L→ må vi vise at alle L→-slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.

Bevaring av falsifiserbarhet

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L$\rightarrow$-regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- I delbeviset for L$\rightarrow$ må vi vise at alle L$\rightarrow$-slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen L$\rightarrow$ generaliserer alle L$\rightarrow$-slutninger.

Bevaring av falsifiserbarhet

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L→-regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\to}$$

- I delbeviset for L→ må vi vise at alle L→-slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen L→ generaliserer alle L→-slutninger.
- Vi lar Γ, Δ, A og B i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle L→-slutninger bevarer falsifiserbarhet.

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R$\neg$.

$$\dfrac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \;\vdash\; \Delta}{\Gamma \;\vdash\; \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\color{red}{\Gamma} \ \vdash \ \neg A, \Delta} \ \mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$

□

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \;\vdash\; \Delta}{\Gamma \;\vdash\; \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R$\neg$.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Per definisjon av v har vi at $v \models A$.

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R$\neg$.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Per definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \;\vdash\; \Delta}{\Gamma \;\vdash\; \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Per definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \;\vdash\; \Delta}{\Gamma \;\vdash\; \neg A, \Delta}\;\mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Per definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Da falsifiserer v premisset.

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L→.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\to}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.

□

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L→.

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\!\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \; \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \; \mathsf{L}\!\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi per definisjon av v at

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi per definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller

□

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \ \vdash \ A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \ \Delta} \ \mathsf{L}\!\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi per definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller
  (2) $v \models B$.

□

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L→.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\!\to$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \to B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \to B$, så har vi per definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller
  (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.

□

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\dfrac{\Gamma \ \vdash \ A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \ \Delta} \, \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi per definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller
  (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer v høyre premiss.

$\square$

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning $\mathcal{D}$, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i $\mathcal{D}$.

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning $\mathcal{D}$, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i $\mathcal{D}$.

Bevis.

Ved såkalt *strukturell induksjon* på LK-utledningen $\mathcal{D}$.

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning $\mathcal{D}$, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i $\mathcal{D}$.

Bevis.

Ved såkalt *strukturell induksjon* på LK-utledningen $\mathcal{D}$.

Basissteg: $\mathcal{D}$ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning $\mathcal{D}$, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i $\mathcal{D}$.

Bevis.

Ved såkalt *strukturell induksjon* på LK-utledningen $\mathcal{D}$.
Basissteg: $\mathcal{D}$ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning $\mathcal{D}$, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i $\mathcal{D}$.

Bevis.

Ved såkalt *strukturell induksjon* på LK-utledningen $\mathcal{D}$.
Basissteg: $\mathcal{D}$ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning D, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i D.

Bevis.

Ved såkalt *strukturell induksjon* på LK-utledningen D.
Basissteg: D er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Da falsifiserer v én løvsekvent i D, nemlig $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i $\mathcal{D}$

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i $\mathcal{D}$, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i $\mathcal{D}$, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i $\mathcal{D}$, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i $\mathcal{D}$.

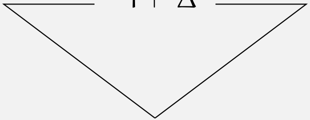
□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$



- Anta at v falsifiserer rotsekventen i $\mathcal{D}$, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i $\mathcal{D}$. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i $\mathcal{D}$.

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ siden α-reglene bevarer falsifiserbarhet.

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i $\mathcal{D}$, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i $\mathcal{D}$, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i $\mathcal{D}$, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i $\mathcal{D}$.

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$

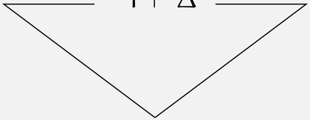
$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$



- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$ siden β-reglene bevarer falsifiserbarhet.

□

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Alle aksiomer er gyldige

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

$\square$

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten

$\square$

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.

$\square$

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.

$\square$

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.

$\square$

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.
- Siden v var tilfeldig valgt, fins ingen motmodell til aksiomet.

$\square$

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhet.

$\square$

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhet.

- Anta at D er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhet.

- Anta at $\mathcal{D}$ er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.

$\square$

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhet.

- Anta at $\mathcal{D}$ er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhet.

- Anta at $\mathcal{D}$ er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell ν som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at ν falsifiserer minst én løvsekvent i $\mathcal{D}$.

$\square$

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhet.

- Anta at $\mathcal{D}$ er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i $\mathcal{D}$.
- Da har $\mathcal{D}$ en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.

$\square$

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhet.

- Anta at $\mathcal{D}$ er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i $\mathcal{D}$.
- Da har $\mathcal{D}$ en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke $\mathcal{D}$ et LK-bevis.

$\square$