

INF1800 – Forelesning 16x

Utsagnslogikk – Sunnhetsteoremet

Roger Antonsen - 8. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-09 01:03)

Bevis for sunnhetsteoremet

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK *ukorrekt* eller *usunn* ...

Definisjon (Sunnhet).

Sekventkalkylen LK er *sunn* hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem.

Sekventkalkylen LK er sunn.

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en *korrekt* kalkyle.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Bevaring av falsifiserbarhet

Definisjon.

En LK-regel θ er *falsifiserbarhetsbevarende* (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en θ -slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.

Lemma.

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. $L\rightarrow$ -regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

- I delbeviset for $L\rightarrow$ må vi vise at alle $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen $L\rightarrow$ generaliserer alle $L\rightarrow$ -slutninger.
- Vi lar Γ, Δ, A og B i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle $L\rightarrow$ -slutninger bevarer falsifiserbarhet.

Bevis (Bevis for $R\neg$).

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} R\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ .
- Per definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ .
- Da falsifiserer v premisset.

Bevis (Bevis for $L\rightarrow$).

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} L\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ .
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi per definisjon av v at
 - (1) $v \not\models A$, eller
 - (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer v høyre premiss.

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Lemma.

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning D , så falsifiserer v minst én av løvsekventene i D .

Bevis.

Ved såkalt *strukturell induksjon* på LK-utledningen D .

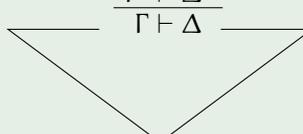
Basissteg: D er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Da falsifiserer v én løvsekvent i D , nemlig $\Gamma \vdash \Delta$.

Bevis (Bevis (induksjonssteg – α -utvidelse)).

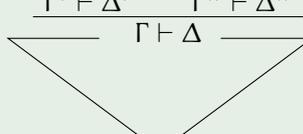
Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$


- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D , og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *ikke* er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D . Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *er* $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ siden α -reglene bevarer falsifiserbarhet.

Bevis (Bevis (induksjonssteg – β -utvidelse)).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \quad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}}{\Gamma \vdash \Delta}$$


- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D , og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β -utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *ikke* er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D . Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D .
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *er* $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$ siden β -reglene bevarer falsifiserbarhet.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma.

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.
- Siden v var tilfeldig valgt, fins ingen motmodell til aksiomet.

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis (Bevis for sunnhet).

- Anta at D er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i D .
- Da har D en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke D et LK-bevis.