INF1800 – Forelesning 16x

Utsagnslogikk – Sunnhetsteoremet

Roger Antonsen - 8. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-09 01:03)

Bevis for sunnhetsteoremet

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK *ukorrekt* eller *usunn* . . .

Definisjon (Sunnhet).
Sekventkalkylen LK er *sunn* hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem.
Sekventkalkylen LK er sunn.

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en *korrekt* kalkyle.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?
Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Bevaring av falsifiserbarhet

Definisjon.
En LK-regel θ er *falsifiserbarhetsbevarende* (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en θ-slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.

Lemma.
Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L→-regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\to}$$

- I delbeviset for L→ må vi vise at alle L→-slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen L→ generaliserer alle L→-slutninger.
- Vi lar Γ, Δ, A og B i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle L→-slutninger bevarer falsifiserbarhet.

Bevis (Bevis for R¬).

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v *falsifiserer alle formlene i* Δ.
- Per definisjon av v har vi at $v \models A$.
- *Vi har da at* $v \models \Gamma \cup \{A\}$ *og* v *falsifiserer alle formlene i* Δ.
- Da falsifiserer v premisset.

Bevis (Bevis for L→).

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\to}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v *oppfyller* $\Gamma \cup \{A \to B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \to B$, så har vi per definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller
  (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer v høyre premiss.

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Lemma.
Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning $\mathcal{D}$, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i $\mathcal{D}$.

Bevis.
Ved såkalt *strukturell induksjon* på LK-utledningen $\mathcal{D}$.
Basissteg: $\mathcal{D}$ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Da falsifiserer v én løvsekvent i $\mathcal{D}$, nemlig $\Gamma \vdash \Delta$.

Bevis (Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse)).
Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i $\mathcal{D}$, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen *før* α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *ikke* er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i $\mathcal{D}$. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i $\mathcal{D}$.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *er* $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ siden α-reglene bevarer falsifiserbarhet.

Bevis (Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse)).
Induksjonssteg: $\mathcal{D}$ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen *før* β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *ikke* er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen *er* $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$ siden β-reglene bevarer falsifiserbarhet.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma.
Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.
- Siden v var tilfeldig valgt, fins ingen motmodell til aksiomet.

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis (Bevis for sunnhet).
- Anta at D er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i D.
- Da har D en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke D et LK-bevis.