INF1800 – Logikk og beregnbarhet

Forelesning 16x: Utsagnslogikk – Sunnhetsteoremet

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

8. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-09 01:03)

Bevis for sunnhetsteoremet

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK ukorrekt eller usunn ...

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK er sunn hvis enhver LK-bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem

Sekventkalkylen LK er sunn.

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en korrekt kalkyle.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Bevaring av falsifiserbarhet

Definisjon

En LK-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en θ-slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.

Lemma

Alle LK-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.

Bevaring av falsifiserbarhet

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. $\mathsf{L}{\rightarrow}$-regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- I delbeviset for $\mathsf{L}{\rightarrow}$ må vi vise at alle $\mathsf{L}{\rightarrow}$-slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen $\mathsf{L}{\rightarrow}$ generaliserer alle $\mathsf{L}{\rightarrow}$-slutninger.
- Vi lar Γ, Δ, A og B i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle $\mathsf{L}{\rightarrow}$-slutninger bevarer falsifiserbarhet.

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \ \Delta}{\Gamma \ \vdash \ \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Per definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Da falsifiserer v premisset.

$\square$

Bevaring av falsifiserbarhet

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi per definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller
  (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer v høyre premiss.

$\square$

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning $\mathcal{D}$, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i $\mathcal{D}$.

Bevis.

Ved såkalt *strukturell induksjon* på LK-utledningen $\mathcal{D}$.

Basissteg: $\mathcal{D}$ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Da falsifiserer v én løvsekvent i $\mathcal{D}$, nemlig $\Gamma \vdash \Delta$.

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ siden α-reglene bevarer falsifiserbarhet.

□

Eksistens av falsifiserbar løvsekvent

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: D er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i D, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i D. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i D.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$ siden β-reglene bevarer falsifiserbarhet.

□

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.
- Siden v var tilfeldig valgt, fins ingen motmodell til aksiomet.

$\square$

Bevis for sunnhetsteoremet

Bevis for sunnhet.

- Anta at $\mathcal{D}$ er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i $\mathcal{D}$.
- Da har $\mathcal{D}$ en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke $\mathcal{D}$ et LK-bevis.

$\square$