INF1800 – Logikk og beregnbarhet

Forelesning 17: Førsteordens logikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

14. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-14 16:29)

Før vi begynner

Repetisjon og kommentarer

Repetisjon og kommentarer

- Vi skal nå kunne

Repetisjon og kommentarer

- Vi skal nå kunne
  - Utsagnslogikk: syntaks og semantikk

Repetisjon og kommentarer

- Vi skal nå kunne
  - Utsagnslogikk: syntaks og semantikk
  - Sekventkalkyle for utsagnslogikk

Repetisjon og kommentarer

- Vi skal nå kunne
  - Utsagnslogikk: syntaks og semantikk
  - Sekventkalkyle for utsagnslogikk
- Under den detaljert undervisningsplanen ligger det ekstramateriale om sunnhet av sekventkalkylen.

Repetisjon og kommentarer

- Vi skal nå kunne
  - Utsagnslogikk: syntaks og semantikk
  - Sekventkalkyle for utsagnslogikk
- Under den detaljert undervisningsplanen ligger det ekstramateriale om sunnhet av sekventkalkylen.
- Det er ikke pensum, men bør leses av alle.

Repetisjon og kommentarer

- Vi skal nå kunne
  - Utsagnslogikk: syntaks og semantikk
  - Sekventkalkyle for utsagnslogikk
- Under den detaljert undervisningsplanen ligger det ekstramateriale om sunnhet av sekventkalkylen.
- Det er ikke pensum, men bør leses av alle.
- Alla skal være i stand til å forklare (intuitivt) hvorfor sekventkalkylen er sunn.

Repetisjon og kommentarer

- Vi skal nå kunne
  - Utsagnslogikk: syntaks og semantikk
  - Sekventkalkyle for utsagnslogikk
- Under den detaljert undervisningsplanen ligger det ekstramateriale om sunnhet av sekventkalkylen.
- Det er ikke pensum, men bør leses av alle.
- Alla skal være i stand til å forklare (intuitivt) hvorfor sekventkalkylen er sunn.
- Praktisk: Hvis dere ønsker å gi tilbakemeldinger til gruppelærerene, så kan skjemaet på nettsidene også brukes til dette.

Nytt tema

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 7.1, side 397–416: *First-order Predicate Calculus*

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 7.1, side 397–416: *First-order Predicate Calculus*
  - Kapittel 7.2, side 416–432: *Equivalent Formulas*

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 7.1, side 397–416: *First-order Predicate Calculus*
  - Kapittel 7.2, side 416–432: *Equivalent Formulas*
- Forelesningsnotatene kan leses helt uavhengig av boken.

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 7.1, side 397–416: *First-order Predicate Calculus*
  - Kapittel 7.2, side 416–432: *Equivalent Formulas*
- Forelesningsnotatene kan leses helt uavhengig av boken.
- Legg vekt på forelesningsnotatene, men les boken også.

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
    - Kapittel 7.1, side 397–416: *First-order Predicate Calculus*
    - Kapittel 7.2, side 416–432: *Equivalent Formulas*
- Forelesningsnotatene kan leses helt uavhengig av boken.
- Legg vekt på forelesningsnotatene, men les boken også.
- Boken er et godt supplement for å få bedre forståelse.

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 7.1, side 397–416: *First-order Predicate Calculus*
  - Kapittel 7.2, side 416–432: *Equivalent Formulas*
- Forelesningsnotatene kan leses helt uavhengig av boken.
- Legg vekt på forelesningsnotatene, men les boken også.
- Boken er et godt supplement for å få bedre forståelse.
- På noen områder er forelesningsnotatene mer detaljerte.

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 7.1, side 397–416: *First-order Predicate Calculus*
  - Kapittel 7.2, side 416–432: *Equivalent Formulas*
- Forelesningsnotatene kan leses helt uavhengig av boken.
- Legg vekt på forelesningsnotatene, men les boken også.
- Boken er et godt supplement for å få bedre forståelse.
- På noen områder er forelesningsnotatene mer detaljerte.
  - Vi har f.eks. et skarpere skille mellom syntaks og semantikk.

Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 7.1, side 397–416: *First-order Predicate Calculus*
  - Kapittel 7.2, side 416–432: *Equivalent Formulas*
- Forelesningsnotatene kan leses helt uavhengig av boken.
- Legg vekt på forelesningsnotatene, men les boken også.
- Boken er et godt supplement for å få bedre forståelse.
- På noen områder er forelesningsnotatene mer detaljerte.
  - Vi har f.eks. et skarpere skille mellom syntaks og semantikk.
- Det vi gjør i timene er mest relevant for eksamen.

Innledning til førsteordens logikk

Introduksjon

Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$.

Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$.
- Med disse kan vi representere, analysere og resonnere over *utsagn*.

Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$.
- Med disse kan vi representere, analysere og resonnere over *utsagn*.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:

Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$.
- Med disse kan vi representere, analysere og resonnere over *utsagn*.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og

Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene $\neg$, $\land$, $\lor$ og $\rightarrow$.
- Med disse kan vi representere, analysere og resonnere over *utsagn*.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).

Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$.
- Med disse kan vi representere, analysere og resonnere over *utsagn*.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.

Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$.
- Med disse kan vi representere, analysere og resonnere over *utsagn*.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.

Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$.
- Med disse kan vi representere, analysere og resonnere over *utsagn*.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
    - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
    - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
    - For utsagnslogikk fins det effektive metoder for å *avgjøre* om en formel er gyldig eller ikke.

Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$.
- Med disse kan vi representere, analysere og resonnere over *utsagn*.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
  - For utsagnslogikk fins det effektive metoder for å *avgjøre* om en formel er gyldig eller ikke.
  - Det fins ikke for førsteordens logikk; vi sier at førsteordens logikk er ikke *avgjørbar*.

Noen eksempler fra matematikk

Noen eksempler fra matematikk

Noen enkle matematisk påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende.

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."

Noen eksempler fra matematikk

Noen enkle matematisk påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende.

- “Ethvert heltall er enten partall eller oddetall.”
- “Det fins uendelig mange primtall.”

Noen eksempler fra matematikk

Noen enkle matematisk påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende.

- “Ethvert heltall er enten partall eller oddetall.”
- “Det fins uendelig mange primtall.”
- “Mellom to brøktall fins det et annet brøktall.”

Noen eksempler fra matematikk

Noen enkle matematisk påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende.

- “Ethvert heltall er enten partall eller oddetall.”
- “Det fins uendelig mange primtall.”
- “Mellom to brøktall fins det et annet brøktall.”
- “Ethvert partall er summen av to primtall.”

Noen eksempler fra matematikk

Noen enkle matematisk påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende.

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det et annet brøktall."
- "Ethvert partall er summen av to primtall."
- "Hvis a er mindre enn b og b er mindre enn c, så er a mindre enn c."

Noen eksempler med naturlig språk

Noen eksempler med naturlig språk

Her er noen ekempler av mindre matematisk art.

- "Alle Ifi-studenter er late."

Noen eksempler med naturlig språk

Her er noen ekempler av mindre matematisk art.

- “Alle Ifi-studenter er late.”
- “Ingen Ifi-studenter er late.”

Noen eksempler med naturlig språk

Her er noen ekempler av mindre matematisk art.

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."

Noen eksempler med naturlig språk

Her er noen ekempler av mindre matematisk art.

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."

Noen eksempler med naturlig språk

Her er noen ekempler av mindre matematisk art.

- “Alle Ifi-studenter er late.”
- “Ingen Ifi-studenter er late.”
- “Noen Ifi-studenter er late.”
- “Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen.”
- “Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen.”

Noen eksempler med naturlig språk

Her er noen ekempler av mindre matematisk art.

- “Alle Ifi-studenter er late.”
- “Ingen Ifi-studenter er late.”
- “Noen Ifi-studenter er late.”
- “Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen.”
- “Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen.”
- “Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat.”

Noen eksempler med naturlig språk

Her er noen ekempler av mindre matematisk art.

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."
- "Alle bevisbare formler er gyldige."

Noen eksempler med naturlig språk

Her er noen ekempler av mindre matematisk art.

- “Alle Ifi-studenter er late.”
- “Ingen Ifi-studenter er late.”
- “Noen Ifi-studenter er late.”
- “Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen.”
- “Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen.”
- “Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat.”
- “Alle bevisbare formler er gyldige.”
- “Det fins to sheriffer i byen.”

Overblikk

Overblikk

Syntaks: Førsteordens språk og formler
– en utvidelse av utsagnslogikk.

Overblikk

Syntaks:	Førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.
Semantikk:	Tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Overblikk

Syntaks: Førsteordens språk og formler
– en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: Tolkninger av førsteordens formler
– modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: Tillegg av regler.

Overblikk

Syntaks: Førsteordens språk og formler
– en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: Tolkninger av førsteordens formler
– modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: Tillegg av regler.

Sunnhet: Alle bevisbare sekventer er gyldige.

Overblikk

Syntaks:	Førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.
Semantikk:	Tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.
Kalkyle:	Tillegg av regler.
Sunnhet:	Alle bevisbare sekventer er gyldige.
Kompletthet:	Alle gyldige sekventer er bevisbare.

Førsteordens logikk: Syntaks

Syntaks: Signaturer

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: logiske symboler)

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- De logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$.

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- De logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$.
- Kvantorene $\exists$ (det fins) og $\forall$ (for alle).

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- De logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$.
- Kvantorene $\exists$ (det fins) og $\forall$ (for alle).
- En tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}$ av variable $x_1, x_2, x_3, \ldots$

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- De logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$.
- Kvantorene $\exists$ (det fins) og $\forall$ (for alle).
- En tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}$ av variable $x_1, x_2, x_3, \ldots$
  (vi skriver som oftest x, y, z, $\ldots$, for variable).

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- De logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$.
- Kvantorene $\exists$ (det fins) og $\forall$ (for alle).
- En tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}$ av variable $x_1, x_2, x_3, \ldots$
(vi skriver som oftest x, y, z, ..., for variable).
- Vi skal også bruke parenteser og kommaer som hjelpesymboler.

Syntaks: Signaturer

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: ikke-logiske symboler)

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- En tellbar mengde av konstantsymboler $c_1, c_2, c_3, \ldots$.

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- En tellbar mengde av konstantsymboler $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- En tellbar mengde av funksjonssymboler $f_1, f_2, f_3, \ldots$.

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- En tellbar mengde av konstantsymboler $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- En tellbar mengde av funksjonssymboler $f_1, f_2, f_3, \ldots$.
- En tellbar mengde av relasjonssymboler $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

Syntaks: Signaturer

Definisjon (Førsteordens språk: ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- En tellbar mengde av konstantsymboler $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- En tellbar mengde av funksjonssymboler $f_1, f_2, f_3, \ldots$.
- En tellbar mengde av relasjonssymboler $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt ariteten til symbolet.

Syntaks: Signaturer

Syntaks: Signaturer

Merk

Syntaks: Signaturer

Merk

- Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.

Syntaks: Signaturer

Merk

- Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.

Definisjon (Signatur)

Syntaks: Signaturer

Merk

- Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.

Definisjon (Signatur)

- De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.

Syntaks: Signaturer

Merk

- Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.

Definisjon (Signatur)

- De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.
- En signatur angis ved et tuppel

Syntaks: Signaturer

Merk

- Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.

Definisjon (Signatur)

- De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.
- En signatur angis ved et tuppel

$$\langle c_1, c_2, c_3, \ldots; f_1, f_2, f_3, \ldots; R_1, R_2, R_3, \ldots \rangle,$$

Syntaks: Signaturer

Merk

- Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.

Definisjon (Signatur)

- De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.
- En signatur angis ved et tuppel

$$\langle c_1, c_2, c_3, \ldots ; f_1, f_2, f_3, \ldots ; R_1, R_2, R_3, \ldots \rangle,$$

hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.

Syntaks: Termer

Syntaks: Termer

Definisjon (Termer)

Syntaks: Termer

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av førsteordens termer er induktivt definert som den minste mengden slik at:

Syntaks: Termer

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av førsteordens termer er induktivt definert som den minste mengden slik at:

- Enhver variabel og konstant er en term.

Syntaks: Termer

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av førsteordens termer er induktivt definert som den minste mengden slik at:

- Enhver variabel og konstant er en term.
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.

Eksempler på førsteordens språk

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- $a, x, y, \dots, f(a), f(x), f(y), \dots$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R\rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- a, x, y, $\ldots$, $f(a)$, $f(x)$, $f(y)$, $\ldots$
- $g(a, a)$, $g(a, x)$, $g(a, y)$, $g(x, x)$, $g(x, y)$, $g(y, y)$, $\ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- $a, x, y, \ldots, f(a), f(x), f(y), \ldots$
- $g(a, a), g(a, x), g(a, y), g(x, x), g(x, y), g(y, y), \ldots$
- $f(f(a)), f(f(x)), f(f(y)), \ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- $a, x, y, \ldots, f(a), f(x), f(y), \ldots$
- $g(a,a), g(a,x), g(a,y), g(x,x), g(x,y), g(y,y), \ldots$
- $f(f(a)), f(f(x)), f(f(y)), \ldots$

Notasjon

Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive fa, fx, fy, gaa, gax, $\ldots$.

Eksempler på førsteordens språk

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$
- *Ikke* termer: $=(x, x), ++, +0, \ldots$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$
- *Ikke* termer: $=(x, x), ++, +0, \ldots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi prefiks notasjon.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \ldots$
- *Ikke* termer: $=(x, x), ++, +0, \ldots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi prefiks notasjon.
- Vi kan også bruke infiks notasjon og skrive: $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \ldots$.

Eksempler på førsteordens språk

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $\in$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $\in$ (begge med aritet 2)

Termer: $\emptyset$, $x \cap \emptyset$, $y \cup (x \cap z)$,...

Eksempler på førsteordens språk

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
$\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
$\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
$\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
$\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, $\mathsf{Slektning}$ (alle med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
$\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
$\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
$\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.
- $\mathsf{mor}(\mathsf{Ola})$, $\mathsf{mor}(\mathsf{Kari})$, $\mathsf{far}(\mathsf{Ola})$ og $\mathsf{far}(\mathsf{Kari})$ er termer.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
$\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, $\mathsf{Slektning}$ (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.
- $\mathsf{mor}(\mathsf{Ola})$, $\mathsf{mor}(\mathsf{Kari})$, $\mathsf{far}(\mathsf{Ola})$ og $\mathsf{far}(\mathsf{Kari})$ er termer.
- $\mathsf{mor}(x)$ og $\mathsf{far}(x)$ er termer.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:
$\langle \mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}; \mathsf{mor}, \mathsf{far}; \mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.
- $\mathsf{mor}(\mathsf{Ola})$, $\mathsf{mor}(\mathsf{Kari})$, $\mathsf{far}(\mathsf{Ola})$ og $\mathsf{far}(\mathsf{Kari})$ er termer.
- $\mathsf{mor}(x)$ og $\mathsf{far}(x)$ er termer.
- $\mathsf{mor}(\mathsf{mor}(x))$ og $\mathsf{mor}(\mathsf{far}(\mathsf{Kari}))$ er termer.

Syntaks: Formler

Syntaks: Formler

Definisjon (Atomær formel: førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Syntaks: Formler

Definisjon (Atomær formel: førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

Syntaks: Formler

Definisjon (Atomær formel: førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

- Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.

Syntaks: Formler

Definisjon (Atomær formel: førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

- Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.
- Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi skrive Rx, Rfa, $Rafa$, etc. for $R(x)$, $R(f(a))$ og $R(a, f(a))$.

Syntaks: Formler

Syntaks: Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

Syntaks: Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. Alle atomære formler er formler.

Syntaks: Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. Alle atomære formler er formler.
2. Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.

Syntaks: Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. Alle atomære formler er formler.
2. Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$ og $(\varphi \to \psi)$ formler.
3. Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ formler.

Syntaks: Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er den minste mengden slik at:

1. Alle atomære formler er formler.
2. Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
3. Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Eksempler på førsteordens formler

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

- Signaturen er $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

- Signaturen er $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$
- Atomære formler i språket:

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle \mathtt{a}, \mathtt{b}; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: $\mathtt{a}$ og $\mathtt{b}$
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

- Signaturen er $\langle \mathtt{a}, \mathtt{b}; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$
- Atomære formler i språket:

1 Alice er et idol:

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

- Signaturen er $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$
- Atomære formler i språket:

1 Alice er et idol: $\mathsf{Idol}(a)$

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

- Signaturen er $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$
- Atomære formler i språket:

1 Alice er et idol: $\mathsf{Idol}(a)$

2 Alice liker Bob:

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

- Signaturen er $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$
- Atomære formler i språket:

1 Alice er et idol: $\mathsf{Idol}(a)$

2 Alice liker Bob: $\mathsf{Liker}(a, b)$

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

- Signaturen er $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker} \rangle$
- Atomære formler i språket:

1 Alice er et idol: $\mathsf{Idol}(a)$

2 Alice liker Bob: $\mathsf{Liker}(a, b)$

3 x liker Alice:

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

- Signaturen er $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$
- Atomære formler i språket:

1 Alice er et idol: $\mathsf{Idol}(a)$

2 Alice liker Bob: $\mathsf{Liker}(a, b)$

3 x liker Alice: $\mathsf{Liker}(x, a)$

Eksempler på førsteordens formler

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4 Alice liker alle:

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4 Alice liker alle: $\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4 Alice liker alle: $\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$

5 Det finnes et idol:

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11	Bob liker noen som liker Alice:	

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \land \mathsf{Liker}(x, a))$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\mathsf{Liker}(x, x)$
11	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \land \mathsf{Liker}(x, a))$
12	Alle liker noen:	

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x (\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x (\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x (\mathsf{Liker}(b, x) \land \mathsf{Liker}(x, a))$
12	Alle liker noen:	$\forall x (\exists y \mathsf{Liker}(x, y))$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \land \mathsf{Liker}(x, a))$
12	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \mathsf{Liker}(x, y))$
13	En som blir likt av alle er et idol:	

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \land \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \land \mathsf{Liker}(x, a))$
12	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \mathsf{Liker}(x, y))$
13	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \mathsf{Liker}(y, x) \rightarrow \mathsf{Idol}(x))$

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \wedge \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \wedge \mathsf{Liker}(x, a))$
12	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \mathsf{Liker}(x, y))$
13	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \mathsf{Liker}(y, x) \rightarrow \mathsf{Idol}(x))$
14	Et idol blir likt av alle:	

Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

4	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
5	Det finnes et idol:	$\exists x \mathsf{Idol}(x)$
6	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(a, x))$
7	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
8	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \rightarrow \mathsf{Liker}(b, x))$
9	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \wedge \mathsf{Liker}(x, b))$
10	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \mathsf{Liker}(x, x)$
11	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \wedge \mathsf{Liker}(x, a))$
12	Alle liker noen:	$\forall x(\exists y \mathsf{Liker}(x, y))$
13	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \mathsf{Liker}(y, x) \rightarrow \mathsf{Idol}(x))$
14	Et idol blir likt av alle:	$\forall x(\mathsf{Idol}(x) \rightarrow \forall y \mathsf{Liker}(y, x))$

Flere eksempler

Flere eksempler

I språket for aritmetikk, $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi følgende formler.

Flere eksempler

I språket for aritmetikk, $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi følgende formler.

- $s0 + s0 = ss0$

Flere eksempler

I språket for aritmetikk, $\langle 0; s, +; =\rangle$, har vi følgende formler.

- $s0 + s0 = ss0$ – "en pluss en er to"

Flere eksempler

I språket for aritmetikk, $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi følgende formler.

- $s0 + s0 = ss0$ – "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$

Flere eksempler

I språket for aritmetikk, $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi følgende formler.

- $s0 + s0 = ss0$ – "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ – "addisjon er kommutativt"

Flere eksempler

I språket for aritmetikk, $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi følgende formler.

- $s0 + s0 = ss0$ – "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ – "addisjon er kommutativt"
- $\neg \exists x (0 = sx)$

Flere eksempler

I språket for aritmetikk, $\langle 0; s, +; =\rangle$, har vi følgende formler.

- $s0 + s0 = ss0$ – "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y(x + y = y + x)$ – "addisjon er kommutativt"
- $\neg \exists x(0 = sx)$ – "0 er ikke etterfølgeren til noe"

Flere eksempler

I språket for aritmetikk, $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi følgende formler.

- $s0 + s0 = ss0$ – "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ – "addisjon er kommutativt"
- $\neg \exists x (0 = sx)$ – "0 er ikke etterfølgeren til noe"
- $\exists x \exists y \neg (x = y)$

Flere eksempler

I språket for aritmetikk, $\langle 0; s, +; = \rangle$, har vi følgende formler.

- $s0 + s0 = ss0$ – "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ – "addisjon er kommutativt"
- $\neg \exists x (0 = sx)$ – "0 er ikke etterfølgeren til noe"
- $\exists x \exists y \neg (x = y)$ – "det fins to forskjellige objekter"

Frie variable i termer

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ betegner mengden av frie variable i termen t.

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ betegner mengden av frie variable i termen t.

Definisjon (Lukket term)

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathsf{FV}(t)$ betegner mengden av frie variable i termen t.

Definisjon (Lukket term)

En term t er lukket hvis $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$, dvs. t inneholder ingen frie variable.

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathsf{FV}(t)$ betegner mengden av frie variable i termen t.

Definisjon (Lukket term)

En term t er lukket hvis $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$, dvs. t inneholder ingen frie variable.

Eksempel

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathsf{FV}(t)$ betegner mengden av frie variable i termen t.

Definisjon (Lukket term)

En term t er lukket hvis $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$, dvs. t inneholder ingen frie variable.

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ har vi:

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathsf{FV}(t)$ betegner mengden av frie variable i termen t.

Definisjon (Lukket term)

En term t er lukket hvis $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$, dvs. t inneholder ingen frie variable.

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ har vi:

- Termen $f(x, a)$ har en fri variabel x.

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathsf{FV}(t)$ betegner mengden av frie variable i termen t.

Definisjon (Lukket term)

En term t er lukket hvis $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$, dvs. t inneholder ingen frie variable.

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ har vi:

- Termen $f(x, a)$ har en fri variabel x.
- Termen $f(a, b)$ har ingen frie variable og er en lukket term.

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor.

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathsf{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x er bundet

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel $(\forall x Rxy \land Pz)$

- x er bundet
- y er fri

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x er bundet
- y er fri
- z er fri

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x er bundet
- y er fri
- z er fri

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x er bundet
- y er fri
- z er fri

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- x er bundet

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $FV(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x er bundet
- y er fri
- z er fri

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- x er bundet
- x er fri

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x er bundet
- y er fri
- z er fri

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- x er bundet
- x er fri
- y er fri

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ for mengden av frie variable i φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \wedge Pz$)

- x er bundet
- y er fri
- z er fri

Eksempel ($\forall x Pxy \rightarrow \forall z Pzx$)

- x er bundet
- x er fri
- y er fri
- z er bundet

Substitusjoner

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel.

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t.

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[x/t] = c$ (når s er en konstant c).

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[x/t] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[x/t] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Eksempel

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[x/t] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Eksempel

- $f(x, y, a)[x/y]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[x/t] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Eksempel

- $f(x, y, a)[x/y] = f(x[x/y], y[x/y], a[x/y])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[x/t] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Eksempel

- $f(x, y, a)[x/y] = f(x[x/y], y[x/y], a[x/y]) = f(y, y, a)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[x/t] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Eksempel

- $f(x, y, a)[x/y] = f(x[x/y], y[x/y], a[x/y]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[y/b]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[x/t] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Eksempel

- $f(x, y, a)[x/y] = f(x[x/y], y[x/y], a[x/y]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[y/b] = f(y[y/b], y[y/b], a[y/b])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[x/t]$ resultatet av å erstatte alle forekomster av x i s med t. Det kan defineres helt presist slik:

1. $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ (når s er en variabel y).
2. $c[x/t] = c$ (når s er en konstant c).
3. $f(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$ (når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).

Eksempel

- $f(x, y, a)[x/y] = f(x[x/y], y[x/y], a[x/y]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[y/b] = f(y[y/b], y[y/b], a[y/b]) = f(b, b, a)$

Substitusjoner

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t]$ hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t] = (\varphi_1[x/t] \circ \varphi_2[x/t])$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t] = (\varphi_1[x/t] \circ \varphi_2[x/t])$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[x/t] =$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t] = (\varphi_1[x/t] \circ \varphi_2[x/t])$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[x/t] = \begin{cases} Qy(\psi[x/t]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t] = (\varphi_1[x/t] \circ \varphi_2[x/t])$, hvor $\circ \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[x/t] = \begin{cases} Qy(\psi[x/t]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t] = (\varphi_1[x/t] \circ \varphi_2[x/t])$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[x/t] = \begin{cases} Qy(\psi[x/t]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[x/a]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t] = (\varphi_1[x/t] \circ \varphi_2[x/t])$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[x/t] = \begin{cases} Qy(\psi[x/t]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[x/a] = (Pay \wedge \forall x Pxy)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t] = (\varphi_1[x/t] \circ \varphi_2[x/t])$, hvor $\circ \in \{\land, \lor, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[x/t] = \begin{cases} Qy(\psi[x/t]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \land \forall xPxy)[x/a] = (Pay \land \forall xPxy)$
- $(Pxy \land \forall xPxy)[y/a]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$ er definert (rekursivt) ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \ldots, t_n[x/t])$
2. $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t] = (\varphi_1[x/t] \circ \varphi_2[x/t])$, hvor $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $Qy\psi[x/t] = \begin{cases} Qy(\psi[x/t]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$, hvor $Q \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[x/a] = (Pay \wedge \forall xPxy)$
- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[y/a] = (Pxa \wedge \forall xPxa)$

Førsteordens logikk: Semantikk

Introduksjon

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil modeller gi oss en semantikk.

Introduksjon

Introduksjon

En modell består intuitivt av

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
    - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D er en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geqslant 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

Modeller – Intuisjon

Modeller – Intuisjon

- Se på formelen

$$\forall x \exists y Rxy.$$

Modeller – Intuisjon

- Se på formelen
$$\forall x \exists y Rxy.$$
- Vi leser den som: *For alle* x, så *fins* det en y slik at Rxy.

Modeller – Intuisjon

- Se på formelen
$$\forall x \exists y Rxy.$$
- Vi leser den som: *For alle* x, så *fins* det en y slik at Rxy.
- Hvorvidt denne formelen er sann eller usann avhenger av tolkningen eller modellen.

Modeller – Intuisjon

- Se på formelen
$$\forall x \exists y Rxy.$$
- Vi leser den som: *For alle* x, så *fins* det en y slik at Rxy.
- Hvorvidt denne formelen er sann eller usann avhenger av tolkningen eller modellen.
    - Hvis R tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over de naturlige tallene, så er den sann.

Modeller – Intuisjon

- Se på formelen
$$\forall x \exists y Rxy.$$
- Vi leser den som: *For alle* x, så *fins* det en y slik at Rxy.
- Hvorvidt denne formelen er sann eller usann avhenger av tolkningen eller modellen.
    - Hvis R tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over de naturlige tallene, så er den sann.
    - Grunnen er at for alle tall så fins det ett som er større.

Modeller – Intuisjon

- Se på formelen
$$\forall x \exists y Rxy.$$
- Vi leser den som: *For alle* x, så *fins* det en y slik at Rxy.
- Hvorvidt denne formelen er sann eller usann avhenger av tolkningen eller modellen.
  - Hvis R tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over de naturlige tallene, så er den sann.
  - Grunnen er at for alle tall så fins det ett som er større.
  - Hvis R tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, så er den usann.

Modeller – Intuisjon

- Se på formelen
$$\forall x \exists y Rxy.$$
- Vi leser den som: *For alle* x, så *fins* det en y slik at Rxy.
- Hvorvidt denne formelen er sann eller usann avhenger av tolkningen eller modellen.
  - Hvis R tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over de naturlige tallene, så er den sann.
  - Grunnen er at for alle tall så fins det ett som er større.
  - Hvis R tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, så er den usann.
  - Grunnen er at det fins et tall, nemlig 7, slik at det *ikke* fins noe større tall.

Modeller – Intuisjon

- Se på formelen
$$\forall x \exists y Rxy.$$
- Vi leser den som: *For alle* x, så *fins* det en y slik at Rxy.
- Hvorvidt denne formelen er sann eller usann avhenger av tolkningen eller modellen.
    - Hvis R tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over de naturlige tallene, så er den sann.
    - Grunnen er at for alle tall så fins det ett som er større.
    - Hvis R tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over mengden $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, så er den usann.
    - Grunnen er at det fins et tall, nemlig 7, slik at det *ikke* fins noe større tall.
- Vi må definere hva vi mener med en *modell*.

Modeller

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.
- Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n, så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.
- Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n, så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.
- Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n, så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.