

# INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

## FORELESNING 17: FØRSTEORDENS LOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk  
Universitetet i Oslo

14. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-14 16:29)

## Før vi begynner

### Repetisjon og kommentarer

- Vi skal nå kunne
  - Utsagnslogikk: syntaks og semantikk
  - Sekventkalkyle for utsagnslogikk
- Under den detaljert undervisningsplanen ligger det ekstramateriale om sunnhet av sekventkalkylen.
- Det er ikke pensum, men bør leses av alle.
- Alla skal være i stand til å forklare (intuitivt) hvorfor sekventkalkylen er sunn.
- Praktisk: Hvis dere ønsker å gi tilbakemeldinger til gruppelærerene, så kan skjemaet på nettsidene også brukes til dette.

### Nytt tema

- Vi begynner nå med førsteordens logikk!
- Vi har satt av minst tre uker til dette.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - 📖 Kapittel 7.1, side 397–416: *First-order Predicate Calculus*
  - 📖 Kapittel 7.2, side 416–432: *Equivalent Formulas*
- Forelesningsnotatene kan leses helt uavhengig av boken.
- Legg vekt på forelesningsnotatene, men les boken også.
- Boken er et godt supplement for å få bedre forståelse.
- På noen områder er forelesningsnotatene mer detaljerte.
  - Vi har f.eks. et skarpere skille mellom syntaks og semantikk.
- Det vi gjør i timene er mest relevant for eksamen.

## Innledning til førsteordens logikk

## Introduksjon

- I utsagnslogikk har vi kun konnektivene  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$  og  $\rightarrow$ .
- Med disse kan vi representere, analysere og resonnerer over *utsagn*.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$  (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$  (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
  - For utsagnslogikk fins det effektive metoder for å *avgjøre* om en formel er gyldig eller ikke.
  - Det fins ikke for førsteordens logikk; vi sier at førsteordens logikk er ikke *avgjørbar*.

## Noen eksempler fra matematikk

Noen enkle matematisk påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende.

- “Ethvert heltall er enten partall eller oddetall.”
- “Det fins uendelig mange primtall.”
- “Mellom to brøktall fins det et annet brøktall.”
- “Ethvert partall er summen av to primtall.”
- “Hvis  $a$  er mindre enn  $b$  og  $b$  er mindre enn  $c$ , så er  $a$  mindre enn  $c$ .”

## Noen eksempler med naturlig språk

Her er noen ekempler av mindre matematisk art.

- “Alle Ifi-studenter er late.”
- “Ingen Ifi-studenter er late.”
- “Noen Ifi-studenter er late.”
- “Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen.”
- “Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen.”
- “Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat.”
- “Alle bevisbare formler er gyldige.”
- “Det fins to sheriffer i byen.”

## Overblikk

**Syntaks:** Førsteordens språk og formler  
– en utvidelse av utsagnslogikk.

**Semantikk:** Tolkninger av førsteordens formler  
– modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

**Kalkyle:** Tillegg av regler.

**Sunnhet:** Alle bevisbare sekvenser er gyldige.

**Kompletthet:** Alle gyldige sekvenser er bevisbare.

## Førsteordens logikk: Syntaks

## Syntaks: Signaturer

### Definisjon (Førsteordens språk: logiske symboler)

Alle **førsteordens språk** består av følgende **logiske symboler**:

- De logiske konnektivene  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$  og  $\neg$ .
- **Kvantorene**  $\exists$  (det fins) og  $\forall$  (for alle).
- En tellbart uendelig mengde  $\mathcal{V}$  av **variable**  $x_1, x_2, x_3, \dots$  (vi skriver som oftest  $x, y, z, \dots$ , for variable).
- Vi skal også bruke parenteser og kommaer som hjelpesymboler.

## Syntaks: Signaturer

### Definisjon (Førsteordens språk: ikke-logiske symboler)

I tillegg består et **førsteordens språk** av følgende mengder av **ikke-logiske symboler**:

- En tellbar mengde av **konstantsymboler**  $c_1, c_2, c_3, \dots$
- En tellbar mengde av **funksjonssymboler**  $f_1, f_2, f_3, \dots$
- En tellbar mengde av **relasjonssymboler**  $R_1, R_2, R_3, \dots$

Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt **ariteten** til symbolet.

## Syntaks: Signaturer

### Merk

- Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.

### Definisjon (Signatur)

- De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en **Signatur**.
- En signatur angis ved et tuppel

$$\langle c_1, c_2, c_3, \dots; f_1, f_2, f_3, \dots; R_1, R_2, R_3, \dots \rangle,$$

hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.

## Syntaks: Termer

### Definisjon (Termer)

Mengden  $\mathcal{T}$  av **førsteordens termer** er induktivt definert som den minste mengden slik at:

- Enhver variabel og konstant er en term.
- Hvis  $f$  er et funksjonssymbol med aritet  $n$  og  $t_1, \dots, t_n$  er termer, så er  $f(t_1, \dots, t_n)$  en term.

## Eksempler på førsteordens språk

### Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler:  $a$
- Funksjonssymboler:  $f$  (med aritet 1) og  $g$  (med aritet 2)
- Relasjonssymboler:  $P$  (med aritet 1) og  $R$  (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- $a, x, y, \dots, f(a), f(x), f(y), \dots$
- $g(a, a), g(a, x), g(a, y), g(x, x), g(x, y), g(y, y), \dots$
- $f(f(a)), f(f(x)), f(f(y)), \dots$

### Notasjon

Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive  $fa, fx, fy, gaa, gax, \dots$

## Eksempler på førsteordens språk

### Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler:  $0$
- Funksjonssymboler:  $s$  (med aritet 1) og  $+$  (med aritet 2)
- Relasjonssymboler:  $=$

Kommentarer:

- Termer:  $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \dots$
- *Ikke termer:*  $= (x, x), ++, +0, \dots$
- Når vi skriver  $+xy$  bruker vi **prefiks notasjon**.
- Vi kan også bruke **infiks notasjon** og skrive:  $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \dots$

## Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk:  $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: 0, 1
- Funksjonssymboler: + og  $\times$  (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: = og  $<$  (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære:  $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler:  $\emptyset$
- Funksjonssymboler:  $\cap$  og  $\cup$  (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: = og  $\in$  (begge med aritet 2)

Termer:  $\emptyset, x \cap \emptyset, y \cup (x \cap z), \dots$

## Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner:

$\langle \text{Ola, Kari; mor, far; Mor, Far, Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- $x$ , Ola og Kari er termer.
- $\text{mor}(\text{Ola})$ ,  $\text{mor}(\text{Kari})$ ,  $\text{far}(\text{Ola})$  og  $\text{far}(\text{Kari})$  er termer.
- $\text{mor}(x)$  og  $\text{far}(x)$  er termer.
- $\text{mor}(\text{mor}(x))$  og  $\text{mor}(\text{far}(\text{Kari}))$  er termer.

## Syntaks: Formler

Definisjon (Atomær formel: førsteordens)

Hvis  $R$  er et relasjonssymbol med aritet  $n$  og  $t_1, \dots, t_n$  er termer, så er  $R(t_1, \dots, t_n)$  en **atomær formel**.

Merk

- Hvis  $R$  har aritet 0, så er  $R$  en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.
- Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi skrive  $Rx$ ,  $Rfa$ ,  $Rafa$ , etc. for  $R(x)$ ,  $R(f(a))$  og  $R(a, f(a))$ .

## Syntaks: Formler

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden  $\mathcal{F}$  av **førsteordens formler** er den minste mengden slik at:

1. Alle atomære formler er formler.
  2. Hvis  $\varphi$  og  $\psi$  er formler, så er  $\neg\varphi$ ,  $(\varphi \wedge \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$  og  $(\varphi \rightarrow \psi)$  formler.
  3. Hvis  $\varphi$  er en formel og  $x$  er en variabel, så er  $\forall x\varphi$  og  $\exists x\varphi$  formler.
- Alle forekomster av en variabel  $x$  i  $\varphi$  sies å være **bundet** i formlene  $\forall x\varphi$  og  $\exists x\varphi$  og innenfor **skopet** til den gjeldende kvantoren.

## Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring:  $\langle a, b; ; \text{Idol}, \text{Liker} \rangle$

- Konstantsymboler:  $a$  og  $b$
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler:  $\text{Idol}$  (med aritet 1) og  $\text{Liker}$  (med aritet 2)

- Signaturen er  $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker} \rangle$
- Atomære formler i språket:

- 1 Alice er et idol:  $\text{Idol}(a)$
- 2 Alice liker Bob:  $\text{Liker}(a, b)$
- 3  $x$  liker Alice:  $\text{Liker}(x, a)$

## Eksempler på førsteordens formler

- Ikke-atomære formler i språket:

- 4 Alice liker alle:  $\forall x \text{Liker}(a, x)$
- 5 Det finnes et idol:  $\exists x \text{Idol}(x)$
- 6 Alice liker alle som Bob liker:  $\forall x (\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
- 7 Noen liker seg selv:  $\exists x \text{Liker}(x, x)$
- 8 Bob liker alle som liker seg selv:  $\forall x (\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
- 9 Ingen liker både Alice og Bob:  $\neg \exists x (\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
- 10 Noen liker ikke seg selv:  $\exists x \neg \text{Liker}(x, x)$
- 11 Bob liker noen som liker Alice:  $\exists x (\text{Liker}(b, x) \wedge \text{Liker}(x, a))$
- 12 Alle liker noen:  $\forall x (\exists y \text{Liker}(x, y))$
- 13 En som blir likt av alle er et idol:  $\forall x (\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$
- 14 Et idol blir likt av alle:  $\forall x (\text{Idol}(x) \rightarrow \forall y \text{Liker}(y, x))$

## Flere eksempler

I språket for aritmetikk,  $\langle 0; s, +; = \rangle$ , har vi følgende formler.

- $s0 + s0 = ss0$  – “en pluss en er to”
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$  – “addisjon er kommutativt”
- $\neg \exists x (0 = sx)$  – “0 er ikke etterfølgeren til noe”
- $\exists x \exists y \neg (x = y)$  – “det fins to forskjellige objekter”

## Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$FV(t)$  betegner mengden av **frie variable** i termen  $t$ .

Definisjon (Lukket term)

En term  $t$  er **lukket** hvis  $FV(t) = \emptyset$ , dvs.  $t$  inneholder ingen frie variable.

Eksempel

I språket  $\langle a, b; f; - \rangle$  har vi:

- Termen  $f(x, a)$  har en fri variabel  $x$ .
- Termen  $f(a, b)$  har ingen frie variable og er en lukket term.

## Frie variable i formler

### Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er **fri** hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver  $FV(\varphi)$  for mengden av frie variable i  $\varphi$ .

#### Eksempel ( $\forall x Rxy \wedge Pz$ )

- $x$  er bundet
- $y$  er fri
- $z$  er fri

#### Eksempel ( $\forall x Pxy \rightarrow \forall z Pzx$ )

- $x$  er bundet
- $x$  er fri
- $y$  er fri
- $z$  er bundet

## Substitusjoner

### Definisjon (Substitusjon for termer)

La  $s$  og  $t$  være termer og  $x$  en variabel. Da er  $s[x/t]$  resultatet av å erstatte alle forekomster av  $x$  i  $s$  med  $t$ . Det kan defineres helt presist slik:

1.  $y[x/t] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$  (når  $s$  er en variabel  $y$ ).
2.  $c[x/t] = c$  (når  $s$  er en konstant  $c$ ).
3.  $f(t_1[x/t], \dots, t_n[x/t])$  (når  $s$  er en funksjonsterm  $f(t_1, \dots, t_n)$ ).

### Eksempel

- $f(x, y, a)[x/y] = f(x[x/y], y[x/y], a[x/y]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[y/b] = f(y[y/b], y[y/b], a[y/b]) = f(b, b, a)$

## Substitusjoner

### Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[x/t]$  er definert (rekursivt) ved:

1.  $R(t_1, \dots, t_n)[x/t] = R(t_1[x/t], \dots, t_n[x/t])$
2.  $\neg\psi[x/t] = \neg(\psi[x/t])$
3.  $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[x/t] = (\varphi_1[x/t] \circ \varphi_2[x/t])$ , hvor  $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4.  $Qy\psi[x/t] = \begin{cases} Qy(\psi[x/t]) & \text{hvis } x \neq y \\ Qy\psi & \text{ellers} \end{cases}$ , hvor  $Q \in \{\forall, \exists\}$

### Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[x/a] = (Pax \wedge \forall x Pxy)$
- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[y/a] = (Pxa \wedge \forall x Pxa)$

## Førsteordens logikk: Semantikk

## Introduksjon

- Hvordan skal vi **tolke** førsteordens formler?
- Hva skal  $\forall x\varphi$  og  $\exists x\varphi$  bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?  
(Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel **sann** / **gyldig** / **oppfyllbar**?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil **modeller** gi oss en semantikk.

## Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
  - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
  - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
  - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

### Husk

Hvis  $D$  er en mengde, så består  $D^n$  av alle  $n$ -tupler av elementer fra  $D$ , for  $n \geq 0$ .

$$D^n = \{\langle d_1, \dots, d_n \rangle \mid d_1, \dots, d_n \in D\}$$

## Modeller – Intuisjon

- Se på formelen

$$\forall x \exists y Rxy.$$

- Vi leser den som: *For alle  $x$ , så fins det en  $y$  slik at  $Rxy$ .*
- Hvorvidt denne formelen er **sann** eller **usann** avhenger av **tolkningen** eller **modellen**.
  - Hvis  $R$  tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over de naturlige tallene, så er den **sann**.
  - Grunnen er at for alle tall så fins det ett som er større.
  - Hvis  $R$  tolkes som *ekte mindre enn*-relasjonen over mengden  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ , så er den **usann**.
  - Grunnen er at det fins et tall, nemlig 7, slik at det *ikke* fins noe større tall.
- Vi må definere hva vi mener med en *modell*.

## Modeller

La et førsteordens språk  $\mathcal{L}$  være gitt.

### Definisjon (Modell)

En **modell**  $\mathcal{M}$  for  $\mathcal{L}$  består av en ikke-tom mengde  $D$ , kalt **domenet** til  $\mathcal{M}$ , og en funksjon  $(\cdot)^{\mathcal{M}}$  som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- Hvis  $c$  er et konstantsymbol, så er  $c^{\mathcal{M}} \in D$ .
- Hvis  $f$  er et funksjonssymbol med aritet  $n$ , så er  $f^{\mathcal{M}}$  en funksjon fra  $D^n = \underbrace{D \times \dots \times D}_n$  til  $D$ .
- Hvis  $R$  er et relasjonssymbol med aritet  $n$ , så er  $R^{\mathcal{M}}$  en relasjon på  $D^n = \underbrace{D \times \dots \times D}_n$ .

Vi skriver  $|\mathcal{M}|$  for domenet  $D$  til modellen  $\mathcal{M}$ .