

INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 18: FØRSTEORDENS LOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

15. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-15 23:50)

Repetisjon og noen løse tråder

Førsteordens språk

Et førsteordens språk \mathcal{L} består av:

1. Logiske symboler

- konnektiver: $\wedge, \vee, \rightarrow$ og \neg
- hjelpesymboler: '(' og ') ' og ' ; '
- kvantorer: \exists og \forall
- variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

2. Ikke-logiske symboler:

- en tellbar mengde konstantsymboler
- en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
- en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en **signatur**

$\langle \underbrace{c_1, c_2, c_3, \dots}_{\text{konstantsymboler}} ; \underbrace{f_1, f_2, f_3, \dots}_{\text{funksjonssymboler}} ; \underbrace{R_1, R_2, R_3, \dots}_{\text{relasjonssymboler}} \rangle$.

konstantsymboler funksjonssymboler relasjonssymboler

Eksempler på signaturer

Vi har sett følgende signaturer:

enkelt språk:	\langle	a	$;$	f, g	$;$	P, R	\rangle
aritmetikk 1:	\langle	0	$;$	$s, +$	$;$	$=$	\rangle
aritmetikk 2:	\langle	$0, 1$	$;$	$+, \times$	$;$	$=, <$	\rangle
mengdelære:	\langle	\emptyset	$;$	\cap, \cup	$;$	$=, \in$	\rangle
familierelasjoner:	\langle	Ola, Kari	$;$	mor, far	$;$	Mor, Far, Slektning	\rangle
beundring:	\langle	a, b	$;$		$;$	Idol, Liker	\rangle

Mengden av førsteordens termer og formler

Hvis et førsteordens språk \mathcal{L} er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden \mathcal{T} av termer i \mathcal{L} :
 - Enhver variabel og konstant er en term.
 - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $f(t_1, \dots, t_n)$ en term.
 2. Mengden \mathcal{F} av formler i \mathcal{L} :
 - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og t_1, \dots, t_n er termer, så er $R(t_1, \dots, t_n)$ en (atomær) formel.
 - Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
 - Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.
- En variabel x er **bundet** hvis den er innenfor **skopet** til en kvantor.
 - En variabelforekomst er **fri** hvis den ikke er bundet.
 - En term som ikke inneholder variable kalles **lukket**.

En kort oppsummering av modeller

En modell \mathcal{M} for et språk \mathcal{L} består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til \mathcal{M} , og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis \mathcal{L} er språket $\langle \text{♠, ♡, ♣, ♣} ; \text{♣} ; \text{♀, ♂} \rangle$, så må en modell \mathcal{M} gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- $\text{♠}^{\mathcal{M}}$, $\text{♡}^{\mathcal{M}}$ og $\text{♣}^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- $\text{♣}^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet.
- $\text{♀}^{\mathcal{M}}$ og $\text{♂}^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene.
- Her kan for eksempel ♣ ha aritet 2, og ♀ og ♂ ha aritet 1.
- En mulig formel i dette språket er $\text{♂}(\text{♠}) \wedge \forall x(\text{♀}(x) \rightarrow \text{♂}(\text{♣}(\text{♠, ♣})))$.

Substitusjoner og frie variable

- Vi har sett at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists xP(x, y)[y/f(x)] = \exists xP(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner og frie variable

Definisjon

Vi sier at **t er fri for x** i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substituere t for x i φ .

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists xP(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists zP(z, y)$ i stedet for $\exists xP(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", det vil si at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er **lukket** hvis $FV(\varphi) = \emptyset$, det vil si at φ ikke inneholder noen frie variable. En formel er **åpen** hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall x Pxa$ er lukket.
- $\forall x Pxy$ er *ikke* lukket.
- Pxy er *ikke* lukket, men åpen.
- Pab er åpen og lukket.

Semantikk (fortsettelse)

Presedensregler

- På samme måte som for utsagnslogiske formler, har vi presedensregler for førsteordens formler.
- Mengden \mathcal{F} av førsteordens formler er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $\exists y P_y \wedge P_x$ som **førsteordens formler** (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik **presedens** i forhold til hverandre.
 1. \neg, \forall og \exists binder sterkest.
 2. \wedge binder svakere.
 3. \vee binder enda svakere.
 4. \rightarrow binder svakest.
- For eksempel:
 - $\exists y P_y \wedge P_x$ betyr $(\exists y P_y) \wedge P_x$ og **ikke** $\exists y (P_y \wedge P_x)$

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
 - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D .
 - Siden D^0 består av kun ett element $\langle \rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle \langle \rangle, e \rangle$, hvor $e \in D$.
 - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e .
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
 - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0 .
 - Siden D^0 består av kun ett element $\langle \rangle$ – det tomme tuppelet – så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
 - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
 - Vi kan derfor tenke på mengden $\{\emptyset, \{\langle \rangle\}\}$ av delmengder av D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e \rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e .
 - Når et relasjonssymbol R har aritet 1, så skriver vi derfor $\{e_1, \dots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1 \rangle, \dots, \langle e_n \rangle\}$.
 - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Eksempel – Et figurspråk

Relasjonssymboler

	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.

- Funksjonssymboler: ingen.

- Vi leser på denne måten:

Sirkel(x) x er en sirkel

Firkant(x) x er en firkant

Trekant(x) x er en trekant

Stor(x) x er stor

Liten(x) x er liten

Mindre(x, y) x er mindre enn y

La oss nå lage en modell for dette språket!

Eksempel – Et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La \mathcal{M} være en modell med domene $D = \{\text{●}, \text{●}, \text{■}, \text{■}, \text{▲}, \text{▲}\}$.

$$a^{\mathcal{M}} = \text{●} \quad \text{Sirkel}^{\mathcal{M}} = \{\text{●}, \text{●}\}$$

$$b^{\mathcal{M}} = \text{●} \quad \text{Firkant}^{\mathcal{M}} = \{\text{■}, \text{■}\}$$

$$c^{\mathcal{M}} = \text{■} \quad \text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{\text{▲}, \text{▲}\}$$

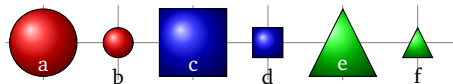
$$d^{\mathcal{M}} = \text{■} \quad \text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{\text{●}, \text{■}, \text{▲}\}$$

$$e^{\mathcal{M}} = \text{▲} \quad \text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{\text{●}, \text{■}, \text{▲}\}$$

$$f^{\mathcal{M}} = \text{▲} \quad \text{Mindre}^{\mathcal{M}} = \{\langle \text{●}, \text{●} \rangle, \langle \text{●}, \text{■} \rangle, \langle \text{●}, \text{▲} \rangle, \langle \text{■}, \text{●} \rangle, \dots\}$$

Eksempel – Et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen \mathcal{M} .



Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)
- Mindre(a, a)

Utvidete språk

- I det foregående eksempelet hadde vi konstantsymboler for alle elementer i domenet.
- Det er veldig nyttig.
- Strengt tatt har vi ingen garanti for et språk er så rikt.
- For enkelhets skyld – og for å definere semantikken – så skal vi anta vi at for enhver modell og ethvert språk, så inneholder språket konstantsymboler for alle elementer i domenet til modellen.

Antakelse

Hvis \mathcal{M} er en modell for \mathcal{L} , så antar vi at for ethvert element a i $|\mathcal{M}|$, så fins et konstantsymbol \bar{a} i \mathcal{L} . Vi antar også at \mathcal{M} tolker \bar{a} som a , med andre ord, at $\bar{a}^{\mathcal{M}} = a$.

Utvidete språk (i detalj – for spesielt interesserte)

- ★ Det går an å gjøre dette mer detaljert og nøyaktig, uten antakelsen om at alle språk har konstantsymboler for alle elementer.
- ★ Idéen er da å lage et nytt språk for hver modell og hvert språk.
- ★ Her er detaljene for de som er spesielt interessert.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra \mathcal{L} ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi \bar{a} for den nye konstanten. Hvis \mathcal{N} er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

- ★ Når vi tolker termer og formler fra språket \mathcal{L} i en modell \mathcal{M} , så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at \mathcal{M} er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ -modell.

Tolkning av termer

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk, og la \mathcal{M} være en modell for \mathcal{L} . Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \dots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \dots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

- Dette er et eksempel på en *rekursiv* definisjon.
 - Tolkningen av konstantsymboler er allerede gitt, siden \mathcal{M} er en modell for \mathcal{L} . Dette gir basistilfellet for rekursjonen.
 - Vi utvider tolkninger til å gjelde for sammensatte termer.
- Vi merker oss at tolkninger kun er definert for *lukkede* termer.
- Når vi nå har angitt hvordan lukkede termer skal tolkes, kan vi gå over til å definere hvordan *formler* skal tolkes.

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk, og la \mathcal{M} en modell for \mathcal{L} . Vi definerer (ved rekursjon) hva det vil si at en lukket formel φ er **sann** i \mathcal{M} . Vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ for at φ er sann i \mathcal{M} eller at \mathcal{M} gjør φ sann.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det **ikke** er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **og** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **eller** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **impliserer** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ **for alle** a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ **for minst en** a i $|\mathcal{M}|$.

Oppfylldbarhet

Definisjon (Oppfylldbarhet)

En lukket formel φ er **oppfylldbar** hvis det fins en modell \mathcal{M} som gjør φ sann. Vi sier i så fall at \mathcal{M} oppfyller φ og at \mathcal{M} en en modell for φ . Hvis φ ikke er oppfylldbar, så er den **kontradiktorisk**.

Oppfylldbar

- $\exists x \text{Liten}(x)$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \wedge \text{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfylldbar

- $Pa \wedge \neg Pa$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \wedge \neg \text{Liten}(x))$
- $\neg \text{Stor}(a) \wedge \forall x \text{Stor}(x)$

Gyldighet

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er **gyldig** hvis den er sann i alle modeller \mathcal{M} , ellers så er den **falsifiserbar**.

Gyldig

- $\forall xPx \rightarrow \forall zPza$
- $(\forall xPx \wedge \forall yQy) \rightarrow \forall xPx$
- $\exists x\text{Liten}(x) \vee \exists x\neg\text{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsifiserbar)

- $\forall xPx$
- $\exists x\text{Stor}(x) \rightarrow \forall x\text{Stor}(x)$
- $\exists xPx \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$

Noen eksempler

Oppgave

Lag en modell som oppfyller følgende formler.

1. $\exists xPx$
2. $\forall x\neg Qx$

Følgende er én måte å løse denne oppgaven på.

- La **domenet** til modellen \mathcal{M} være $\{1\}$, det vil si, $|\mathcal{M}| = \{1\}$.
- Det er ingen **konstantsymboler** eller **funksjonssymboler** i språket, så vi trenger ikke å spesifisere tolkningen av disse.
- La **relasjonssymbolene** tolkes slik at $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Formel 1 er sann fordi $P(\bar{1})$ er sann, og $P(\bar{1})$ er sann fordi $1 \in P^{\mathcal{M}}$.
- Formel 2 er sann fordi $\neg Q(\bar{1})$ er sann, og $\neg Q(\bar{1})$ er sann fordi $Q(\bar{1})$ er usann, og $Q(\bar{1})$ er usann fordi $1 \notin Q^{\mathcal{M}}$.

Noen eksempler

Oppgave

Lag en modell som oppfyller følgende formler.

1. $Pa \wedge Pb$
2. $\neg\exists x(Px \wedge Qx)$
3. $\exists xQx$.

Følgende er én måte å løse denne oppgaven på.

- La **domenet** til modellen være $\{1, 2, 3\}$, det vil si, $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$.
- La **konstantsymbolene** tolkes slik at $a^{\mathcal{M}} = 1$, $b^{\mathcal{M}} = 2$ og $c^{\mathcal{M}} = 3$.
- Det er ingen **funksjonssymboler** i språket.
- La **relasjonssymbolene** tolkes slik at $P^{\mathcal{M}} = \{1, 2\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{3\}$.
- Formel 1 er sann fordi $1 \in P^{\mathcal{M}}$ og $2 \in P^{\mathcal{M}}$.
- Formel 2 er sann fordi $(P^{\mathcal{M}} \cap Q^{\mathcal{M}}) = \emptyset$.
- Formel 3 er sann fordi $3 \in Q^{\mathcal{M}}$.