INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 18: FØRSTEORDENS LOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

15. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-15 23:50)

Repetisjon og noen løse tråder

Førsteordens språk

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en signatur

$$\langle \underbrace{c_1, c_2, c_3, \ldots}_{\text{konstantsymboler}} ; \underbrace{f_1, f_2, f_3, \ldots}_{\text{funksjonssymboler}} ; \underbrace{R_1, R_2, R_3, \ldots}_{\text{relasjonssymboler}} \rangle.$$

Eksempler på signaturer

Vi har sett følgende signaturer:

enkelt språk:	$\langle$	a	;	f, g	;	P, R	$\rangle$
aritmetikk 1:	$\langle$	0	;	$s, +$	;	$=$	$\rangle$
aritmetikk 2:	$\langle$	$0, 1$	;	$+, \times$	;	$=, <$	$\rangle$
mengdelære:	$\langle$	$\emptyset$	;	$\cap, \cup$	;	$=, \in$	$\rangle$
familierelasjoner:	$\langle$	$\mathsf{Ola}, \mathsf{Kari}$	;	$\mathsf{mor}, \mathsf{far}$	;	$\mathsf{Mor}, \mathsf{Far}, \mathsf{Slektning}$	$\rangle$
beundring:	$\langle$	a, b	;		;	$\mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}$	$\rangle$

Mengden av førsteordens termer og formler

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.
   - Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$ og $(\varphi \to \psi)$ formler.
   - Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ formler.

- En variabel x er bundet hvis den er innenfor skopet til en kvantor.
- En variabelforekomst er fri hvis den ikke er bundet.
- En term som ikke inneholder variable kalles lukket.

En kort oppsummering av modeller

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet.
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene.
- Her kan for eksempel 🏭 ha aritet 2, og ♀ og ♂ ha aritet 1.
- En mulig formel i dette språket er ♂(🚹) $\land \forall x($♀$(x) \rightarrow$ ♂(🏭(🚺, ☕))).

Substitusjoner og frie variable

- Vi har sett at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x P(x, y)[y/f(x)] = \exists x P(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner og frie variable

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substituere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x P(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z P(z, y)$ i stedet for $\exists x P(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", det vil si at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, det vil si at φ ikke inneholder noen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall x Pxa$ er lukket.
- $\forall x Pxy$ er *ikke* lukket.
- Pxy er *ikke* lukket, men åpen.
- Pab er åpen *og* lukket.

Presedensregler

- På samme måte som for utsagnslogiske formler, har vi presedensregler for førsteordens formler.
- Mengden $\mathcal{F}$ av førsteordens formler er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $\exists y Py \land Px$ som førsteordens formler (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik presedens i forhold til hverandre.
  1. $\neg$, $\forall$ og $\exists$ binder sterkest.
  2. $\land$ binder svakere.
  3. $\lor$ binder enda svakere.
  4. $\rightarrow$ binder svakest.
- For eksempel:
  - $\exists y Py \land Px$ betyr $(\exists y Py) \land Px$ og ikke $\exists y(Py \land Px)$

Semantikk (fortsettelse)

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet – så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ – det tomme tuppelet - så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på mengden $\{\emptyset, \{\langle\rangle\}\}$ av delmengder av D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1, så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Eksempel – Et figurspråk

Relasjonssymboler	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

$\mathsf{Sirkel}(x)$	x er en sirkel
$\mathsf{Firkant}(x)$	x er en firkant
$\mathsf{Trekant}(x)$	x er en trekant
$\mathsf{Stor}(x)$	x er stor
$\mathsf{Liten}(x)$	x er liten
$\mathsf{Mindre}(x, y)$	x er mindre enn y

La oss nå lage en modell for dette språket!

Eksempel – Et figurspråk

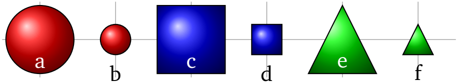
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ \}$.

$$
\begin{array}{llll}
a^{\mathcal{M}} = & & \mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}} & = \{\ ,\ \} \\
b^{\mathcal{M}} = & & \mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}} & = \{\ ,\ \} \\
c^{\mathcal{M}} = & & \mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} & = \{\ ,\ \} \\
d^{\mathcal{M}} = & & \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} & = \{\ ,\ ,\ \} \\
e^{\mathcal{M}} = & & \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} & = \{\ ,\ ,\ \} \\
f^{\mathcal{M}} = & & \mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}} & = \{\langle\ ,\ \rangle, \langle\ ,\ \rangle, \langle\ ,\ \rangle, \langle\ ,\ \rangle, \ldots\}
\end{array}
$$

Eksempel – Et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

- $\mathsf{Sirkel}(a)$
- $\mathsf{Firkant}(c)$
- $\mathsf{Liten}(b)$
- $\mathsf{Mindre}(b, e)$

Usant

- $\mathsf{Trekant}(a)$
- $\mathsf{Stor}(b)$
- $\mathsf{Mindre}(a, b)$
- $\mathsf{Mindre}(a, a)$

Utvidete språk

- I det foregående eksempelet hadde vi konstantsymboler for alle elementer i domenet.
- Det er veldig nyttig.
- Strengt tatt har vi ingen garanti for et språk er så rikt.
- For enkelhets skyld – og for å definere semantikken – så skal vi anta vi at for enhver modell og ethvert språk, så inneholder språket konstantsymboler for alle elementer i domenet til modellen.

Antakelse

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell for $\mathcal{L}$, så antar vi at for ethvert element a i $|\mathcal{M}|$, så fins et konstantsymbol $\bar{a}$ i $\mathcal{L}$. Vi antar også at $\mathcal{M}$ tolker $\bar{a}$ som a, med andre ord, at $\bar{a}^{\mathcal{M}} = a$.

Utvidete språk (i detalj – for spesielt interesserte)

- ⋆ Det går an å gjøre dette mer detaljert og nøyaktig, uten antakelsen om at alle språk har konstantsymboler for alle elementer.
- ⋆ Idéen er da å lage et nytt språk for hver modell og hvert språk.
- ⋆ Her er detaljene for de som er spesielt interessert.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til *nye* konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten. Hvis $\mathcal{N}$ er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

- ⋆ Når vi tolker termer og formler fra språket $\mathcal{L}$ i en modell $\mathcal{M}$, så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk, og la $\mathcal{M}$ være en modell for $\mathcal{L}$. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

- Dette er et eksempel på en *rekursiv* definisjon.
    - Tolkningen av konstantsymboler er allerede gitt, siden $\mathcal{M}$ er en modell for $\mathcal{L}$. Dette gir basistilfellet for rekursjonen.
    - Vi utvider tolkninger til å gjelde for sammensatte termer.
- Vi merker oss at tolkninger kun er definert for *lukkede* termer.
- Når vi nå har angitt hvordan lukkede termer skal tolkes, kan vi gå over til å definere hvordan *formler* skal tolkes.

Tolkning av formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk, og la $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Vi definerer (ved rekursjon) hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$. Vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ for at φ er sann i $\mathcal{M}$ eller at $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

Oppfyllbarhet

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier i så fall at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ. Hvis φ ikke er oppfyllbar, så er den kontradiktorisk.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathsf{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathsf{Liten}(x) \land \mathsf{Stor}(x))$
- $\exists x P x \to \forall x P x$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathsf{Liten}(x) \land \neg \mathsf{Liten}(x))$
- $\neg \mathsf{Stor}(a) \land \forall x \mathsf{Stor}(x)$

Gyldighet

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x P x a \rightarrow \forall z P z a$
- $(\forall x P x \land \forall y Q y) \rightarrow \forall x P x$
- $\exists x \mathsf{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathsf{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x P x$
- $\exists x \mathsf{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathsf{Stor}(x)$
- $\exists x P x \rightarrow \exists x (P x \land Q x)$

Noen eksempler

Oppgave

Lag en modell som oppfyller følgende formler.

1. $\exists x P x$
2. $\forall x \neg Q x$

Følgende er én måte å løse denne oppgaven på.

- La domenet til modellen $\mathcal{M}$ være $\{1\}$, det vil si, $|\mathcal{M}| = \{1\}$.
- Det er ingen konstantsymboler eller funksjonssymboler i språket, så vi trenger ikke å spesifisere tolkningen av disse.
- La relasjonssymbolene tolkes slik at $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Formel 1 er sann fordi $P(\bar{1})$ er sann, og $P(\bar{1})$ er sann fordi $1 \in P^{\mathcal{M}}$.
- Formel 2 er sann fordi $\neg Q(\bar{1})$ er sann, og $\neg Q(\bar{1})$ er sann fordi $Q(\bar{1})$ er usann, og $Q(\bar{1})$ er usann fordi $1 \notin Q^{\mathcal{M}}$.

Noen eksempler

Oppgave

Lag en modell som oppfyller følgende formler.

1. $Pa \land Pb$
2. $\neg\exists x(Px \land Qx)$
3. $\exists x Qx$.

Følgende er én måte å løse denne oppgaven på.

- La domenet til modellen være $\{1, 2, 3\}$, det vil si, $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$.
- La konstantsymbolene tolkes slik at $a^{\mathcal{M}} = 1$, $b^{\mathcal{M}} = 2$ og $c^{\mathcal{M}} = 3$.
- Det er ingen funksjonssymboler i språket.
- La relasjonssymbolene tolkes slik at $P^{\mathcal{M}} = \{1, 2\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{3\}$.
- Formel 1 er sann fordi $1 \in P^{\mathcal{M}}$ og $2 \in P^{\mathcal{M}}$.
- Formel 2 er sann fordi $(P^{\mathcal{M}} \cap Q^{\mathcal{M}}) = \emptyset$.
- Formel 3 er sann fordi $3 \in Q^{\mathcal{M}}$.