# INF1800 – Forelesning 19

## Førsteordens logikk

### Roger Antonsen - 21. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-21 20:12)

## Repetisjon

### Semantikk

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og $\varphi$ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket – med konstanter for hvert element i domenet – for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det *ikke* er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *og* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ *for alle* $a$ i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ *for minst en* $a$ i $|\mathcal{M}|$.

Vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ for at $\varphi$ er sann i $\mathcal{M}$ eller at $\mathcal{M}$ gjør $\varphi$ sann.

### Språk og modeller: Et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å "fange inn" og beskrive virkeligheten.

## Noen eksempler

### Eksempel 1

**Oppgave.**
Lag en modell som oppfyller følgende formler.

1. $\exists x Px$
2. $\forall x \neg Qx$

Følgende er én måte å løse denne oppgaven på.

- La domenet til modellen $\mathcal{M}$ være $\{1\}$, det vil si, $|\mathcal{M}| = \{1\}$.
- Det er ingen konstantsymboler eller funksjonssymboler i språket, så vi trenger ikke å spesifisere tolkningen av disse.
- La relasjonssymbolene tolkes slik at $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Formel 1 er sann fordi $P(\bar{1})$ er sann, og $P(\bar{1})$ er sann fordi $1 \in P^{\mathcal{M}}$.
- Formel 2 er sann fordi $\neg Q(\bar{1})$ er sann, og $\neg Q(\bar{1})$ er sann fordi $Q(\bar{1})$ er usann, og $Q(\bar{1})$ er usann fordi $1 \notin Q^{\mathcal{M}}$.

### Eksempel 2

**Oppgave.**
Lag en modell som oppfyller følgende formler.

1. $Pa \land Pb$
2. $\neg \exists x(Px \land Qx)$
3. $\exists x Qx$.

Følgende er én måte å løse denne oppgaven på.

- La domenet til modellen være $\{1, 2\}$, det vil si, $|\mathcal{M}| = \{1, 2\}$.
- La konstantsymbolene tolkes slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Det er ingen funksjonssymboler i språket.
- La relasjonssymbolene tolkes slik at $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Formel 1 er sann fordi $1 \in P^{\mathcal{M}}$.
- Formel 2 er sann fordi $(P^{\mathcal{M}} \cap Q^{\mathcal{M}}) = \emptyset$.
- Formel 3 er sann fordi $2 \in Q^{\mathcal{M}}$.

### Eksempel 3

**Oppgave.**
Vis at følgende formel er gyldig.

1. $(\forall x Px \land \forall x Qx) \to \forall x(Px \land Qx)$

- For å vise at en implikasjon $(F \to G)$ er *gyldig*, så er det tilstrekkelig å vise at hvis en modell gjør $F$ sann, så gjør den også $G$ sann.

A1 Anta derfor at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $D$ som gjør $(\forall x Px \land \forall x Qx)$ sann.
(Fra antakelsen A1 skal vi altså vise at $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.)

A2 Anta at $a$ er et vilkårlig element i domenet $D$.

- Fra antakelse A1 følger det at $\mathcal{M}$ gjør både $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sann.
- Fra antakelse A2 følger det at $P\bar{a}$ og $Q\bar{a}$ begge er sanne i $\mathcal{M}$.

- Da må også $P\bar{a} \land Q\bar{a}$ være sann i $\mathcal{M}$.
- Siden $a$ var vilkårlig valgt, så følger det at $\forall x(Px \land Qx)$ er sann i $\mathcal{M}$.

### Eksempel 4

**Oppgave.**
Vis at følgende formel *ikke* er gyldig.

1. $\forall x(Px \lor Qx) \to (\forall xPx \lor \forall xQx)$

- Vi må finne en modell som gjør formelen usann.
- Vi må altså finne en modell $\mathcal{M}$ som gjør $\forall x(Px \lor Qx)$ sann, men som gjør $(\forall xPx \lor \forall xQx)$ usann.
- Da må modellen $\mathcal{M}$ gjøre både $\forall xPx$ og $\forall xQx$ usanne.
- La domenet til $\mathcal{M}$ være $\{1, 2\}$.
- For å gjøre $\forall xPx$ usann, la $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$.

  Da vil $P\bar{2}$, og derfor også $\forall xPx$, være usann.
- For å gjøre $\forall xQx$ usann, la $Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$.

  Da vil $Q\bar{1}$, og derfor også $\forall xQx$, være usann.
- Det er lett å sjekke at $\forall x(Px \lor Qx)$ er sann i $\mathcal{M}$.

### Eksempel 5

**Oppgave.**
Vis at følgende formel er gyldig.

1. $\forall xRxx \to \forall x\exists yRxy$

- La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D$ og anta at $\mathcal{M} \models \forall xRxx$.
- Det er tilstrekkelig å vise at $\mathcal{M} \models \forall x\exists yRxy$.
- La $a \in D$ være vilkårlig valgt.
- Ved antakelse vet vi at $\mathcal{M} \models R\bar{a}\bar{a}$.
- Da er det slik at $\mathcal{M} \models \exists yR\bar{a}y$.
- Siden $a$ var vilkårlig valgt, vil $\mathcal{M} \models \forall x\exists yRxy$.

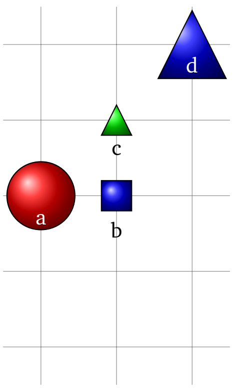
# Figurspråket igjen

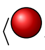
## En utvidelse av figurspråket

**Figurspråket**

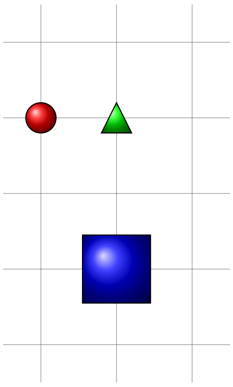
| Atomær formel | Intendert tolkning |
|---|---|
| $\mathsf{Sirkel}(x)$ | $x$ er en sirkel |
| $\mathsf{Firkant}(x)$ | $x$ er en firkant |
| $\mathsf{Trekant}(x)$ | $x$ er en trekant |
| $\mathsf{Stor}(x)$ | $x$ er stor |
| $\mathsf{Liten}(x)$ | $x$ er liten |
| $\mathsf{Mindre}(x, y)$ | $x$ er mindre enn y |
| $\mathsf{Over}(x, y)$ | $x$ er nærmere toppen enn $y$ |
| $\mathsf{Under}(x, y)$ | $x$ er nærmere bunnen enn $y$ |
| $\mathsf{VenstreFor}(x, y)$ | $x$ er lenger til venstre enn $y$ |
| $\mathsf{HoyreFor}(x, y)$ | $x$ er lenger til høyre enn $y$ |
| $\mathsf{Inntil}(x, y)$ | $x$ er rett ved siden av, rett over eller rett under $y$ |
| $\mathsf{Mellom}(x, y, z)$ | $x$, $y$ og $z$ er i samme kolonne, rad eller diagonal, og $x$ er mellom $y$ og $z$ |

## Forklarende eksempel til semantikken




- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \mathsf{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\mathsf{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{VenstreFor}(a, c) \land \neg\mathsf{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Inntil}(a, b) \land \neg\mathsf{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \mathsf{Mellom}(c, a, d) \land \neg\mathsf{Mellom}(c, b, d)$

## Eksempel 1

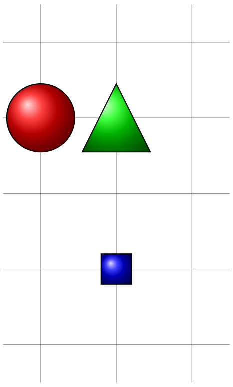


- Er det slik at $\mathcal{M} \vDash \exists x \mathsf{Liten}(x)$ ?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \mathsf{Liten}(\bar{a}) \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, kan vi konkludere med **JA**.

## Eksempel 2

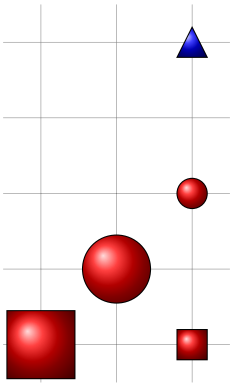


- Er det slik at $\mathcal{M} \vDash \forall x \mathsf{Stor}(x)$ ?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a}) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$ og $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, så kan vi konkludere med **NEI**.

### Eksempel 3



$\mathcal{M} \models \forall x(\mathsf{Stor}(x) \to \mathsf{Sirkel}(x))$

$\Updownarrow$

for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så

$\mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a}) \to \mathsf{Sirkel}(\bar{a})$

$\Updownarrow$

for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så

$\mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a})$ impliserer $\mathcal{M} \models \mathsf{Sirkel}(\bar{a})$

$\Updownarrow$

for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så

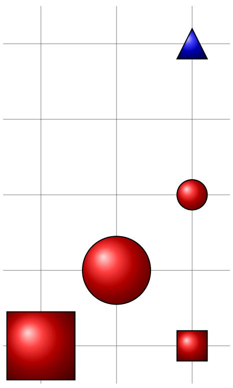
hvis $a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$, så $a \in \mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}}$

$\Updownarrow$

"alle store objekter er sirkler"

**Påstanden holder ikke.**

### Eksempel 4



$\mathcal{M} \models \forall x(\mathsf{Sirkel}(x) \to \exists y \exists z \mathsf{Mellom}(x, y, z))$

$\Updownarrow$

for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så

$\mathcal{M} \models \mathsf{Sirkel}(\bar{a}) \to \exists y \exists z \mathsf{Mellom}(\bar{a}, y, z)$

$\Updownarrow$

for alle sirkler $a \in |\mathcal{M}|$ så

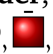
$\mathcal{M} \models \exists y \exists z \mathsf{Mellom}(\bar{a}, y, z)$

$\Updownarrow$

for alle sirkler $a \in |\mathcal{M}|$ så

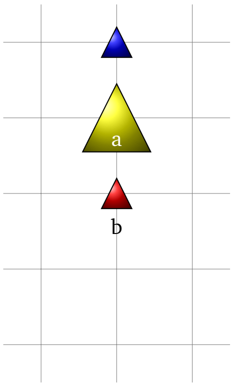
fins $b, c \in \mathcal{M}$ slik at $\mathcal{M} \models \mathsf{Mellom}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$

**Påstanden holder**, fordi

$\mathcal{M} \models \mathsf{Mellom}($, , $)$ og

$\mathcal{M} \models \mathsf{Mellom}($, , $)$.

## Eksempel 5

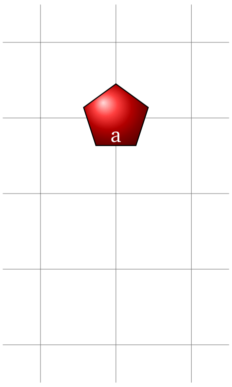



Er følgende formler oppfyllbare samtidig?

1. $\mathsf{Stor}(a) \land \mathsf{Liten}(b)$
2. $\forall x(\mathsf{Trekant}(x))$
3. $\forall x(\mathsf{Inntil}(x, a) \lor \mathsf{Inntil}(x, b))$
4. $\neg\exists x(\mathsf{VenstreFor}(x, a) \lor \mathsf{HoyreFor}(x, a))$
5. $\forall x(\mathsf{Stor}(x) \to \exists y \mathsf{Over}(y, x))$

**Svaret er JA!**

## Eksempel 6




Er følgende formler oppfyllbare?

1. $\neg\mathsf{Sirkel}(a) \land \neg\mathsf{Trekant}(a) \land \neg\mathsf{Firkant}(a))$

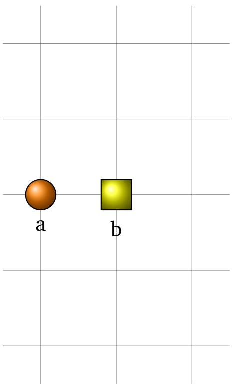
   **Svaret er JA!**

   La $|\mathcal{M}| = \{$$\}$ og $a^{\mathcal{M}} =$ .
2. $\mathsf{Liten}(a) \land \mathsf{Stor}(a)$

   **Svaret er JA!**

   La $|\mathcal{M}| = \{$🚲$\}$, $a^{\mathcal{M}} =$ 🚲 og $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$🚲$\}$

## Bruke språket til å beskrive modeller




Gi en mengde formler som beskriver denne modellen nøyaktig, dvs. som har denne og (essensielt) ingen andre modeller.

1. $\mathsf{Sirkel}(a) \land \mathsf{Firkant}(b)$
2. $\forall x \mathsf{Liten}(x)$
3. $\mathsf{VenstreFor}(a, b)$
4. $\forall x(\mathsf{Inntil}(x, a) \lor \mathsf{Inntil}(x, b))$
5. $\forall x(\neg\mathsf{Over}(x, a) \land \neg\mathsf{Under}(x, a))$
6. $\forall x(\neg\mathsf{VenstreFor}(x, a) \land \neg\mathsf{HoyreFor}(x, b))$

Ganske vanskelig...