

INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 19: FØRSTEORDENS LOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

21. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-21 20:12)

Repetisjon

Semantikk

Hvis \mathcal{M} er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket – med konstanter for hvert element i domenet – for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \dots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \dots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det **ikke** er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **og** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **eller** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ **impliserer** $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ **for alle** a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[x/\bar{a}]$ **for minst en** a i $|\mathcal{M}|$.

Vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ for at φ er sann i \mathcal{M} eller at \mathcal{M} gjør φ sann.

Språk og modeller: Et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
 - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
 - Sjekke om en formel er oppfylld eller falsifiserbar.
 - Sjekke om en formel er gyldig.
 - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
 - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å “fange inn” og beskrive virkeligheten.

Noen eksempler

Eksempel 1

Oppgave

Lag en modell som oppfyller følgende formler.

1. $\exists x Px$
2. $\forall x \neg Qx$

Følgende er én måte å løse denne oppgaven på.

- La **domenet** til modellen \mathcal{M} være $\{1\}$, det vil si, $|\mathcal{M}| = \{1\}$.
- Det er ingen **konstantsymboler** eller **funksjonssymboler** i språket, så vi trenger ikke å spesifisere tolkningen av disse.
- La **relasjonssymbolene** tolkes slik at $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Formel 1 er sann fordi $P(\bar{1})$ er sann, og $P(\bar{1})$ er sann fordi $1 \in P^{\mathcal{M}}$.
- Formel 2 er sann fordi $\neg Q(\bar{1})$ er sann, og $\neg Q(\bar{1})$ er sann fordi $Q(\bar{1})$ er usann, og $Q(\bar{1})$ er usann fordi $1 \notin Q^{\mathcal{M}}$.

Eksempel 2

Oppgave

Lag en modell som oppfyller følgende formler.

1. $Pa \wedge Pb$
2. $\neg \exists x (Px \wedge Qx)$
3. $\exists x Qx$.

Følgende er én måte å løse denne oppgaven på.

- La **domenet** til modellen være $\{1, 2\}$, det vil si, $|\mathcal{M}| = \{1, 2\}$.
- La **konstantsymbolene** tolkes slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Det er ingen **funksjonssymboler** i språket.
- La **relasjonssymbolene** tolkes slik at $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Formel 1 er sann fordi $1 \in P^{\mathcal{M}}$.
- Formel 2 er sann fordi $(P^{\mathcal{M}} \cap Q^{\mathcal{M}}) = \emptyset$.
- Formel 3 er sann fordi $2 \in Q^{\mathcal{M}}$.

Eksempel 3

Oppgave

Vis at følgende formel er gyldig.

1. $(\forall x Px \wedge \forall x Qx) \rightarrow \forall x (Px \wedge Qx)$

- For å vise at en implikasjon ($F \rightarrow G$) er *gyldig*, så er det tilstrekkelig å vise at hvis en modell gjør F sann, så gjør den også G sann.

A1 Anta derfor at \mathcal{M} er en modell med domene D som gjør $(\forall x Px \wedge \forall x Qx)$ sann.
(Fra antakelsen A1 skal vi altså vise at \mathcal{M} gjør $\forall x (Px \wedge Qx)$ sann.)

A2 Anta at a er et vilkårlig element i domenet D .

- Fra antakelse A1 følger det at \mathcal{M} gjør både $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sann.
- Fra antakelse A2 følger det at $P\bar{a}$ og $Q\bar{a}$ begge er sanne i \mathcal{M} .
- Da må også $P\bar{a} \wedge Q\bar{a}$ være sann i \mathcal{M} .
- Siden a var vilkårlig valgt, så følger det at $\forall x (Px \wedge Qx)$ er sann i \mathcal{M} .

Eksempel 4

Oppgave

Vis at følgende formel *ikke* er gyldig.

1. $\forall x(Px \vee Qx) \rightarrow (\forall xPx \vee \forall xQx)$

- Vi må finne en modell som gjør formelen usann.
- Vi må altså finne en modell \mathcal{M} som gjør $\forall x(Px \vee Qx)$ sann, men som gjør $(\forall xPx \vee \forall xQx)$ usann.
- Da må modellen \mathcal{M} gjøre både $\forall xPx$ og $\forall xQx$ usanne.
- La domenet til \mathcal{M} være $\{1, 2\}$.
- For å gjøre $\forall xPx$ usann, la $P^{\mathcal{M}} = \{1\}$.
Da vil $P\bar{2}$, og derfor også $\forall xPx$, være usann.
- For å gjøre $\forall xQx$ usann, la $Q^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
Da vil $Q\bar{1}$, og derfor også $\forall xQx$, være usann.
- Det er lett å sjekke at $\forall x(Px \vee Qx)$ er sann i \mathcal{M} .

Eksempel 5

Oppgave

Vis at følgende formel er gyldig.

1. $\forall xRxx \rightarrow \forall x\exists yRxy$

- La \mathcal{M} være en modell med domene D og anta at $\mathcal{M} \models \forall xRxx$.
- Det er tilstrekkelig å vise at $\mathcal{M} \models \forall x\exists yRxy$.
- La $a \in D$ være vilkårlig valgt.
- Ved antakelse vet vi at $\mathcal{M} \models R\bar{a}\bar{a}$.
- Da er det slik at $\mathcal{M} \models \exists yR\bar{a}y$.
- Siden a var vilkårlig valgt, vil $\mathcal{M} \models \forall x\exists yRxy$.

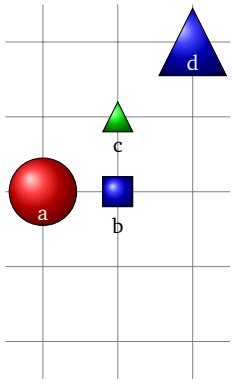
Figurspråket igjen

En utvidelse av figurspråket

Figurspråket

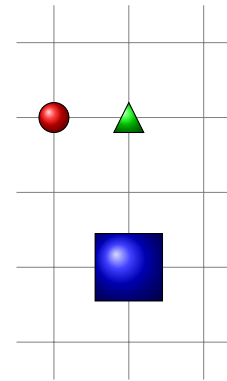
Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
Mellom(x, y, z)	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z

Forklarende eksempel til semantikken



- $a^{\mathcal{M}} = \text{red circle}, b^{\mathcal{M}} = \text{blue square}, c^{\mathcal{M}} = \text{green triangle}, d^{\mathcal{M}} = \text{blue triangle}$
(vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{\text{green triangle}, \text{blue triangle}\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{\text{red circle}, \text{blue triangle}\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{\text{blue square}, \text{green triangle}\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle \text{red circle}, \text{green triangle} \rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg \text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \wedge \neg \text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \wedge \neg \text{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(c, a, d) \wedge \neg \text{Mellom}(c, b, d)$

Eksempel 1

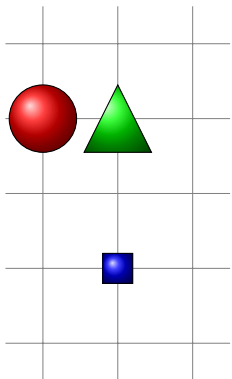


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av \models .

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x) & \\ \iff & \\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \text{Liten}(a) & \\ \iff & \\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a^{\mathcal{M}} \in \text{Liten}^{\mathcal{M}} & \\ \iff & \\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \text{Liten}^{\mathcal{M}} & \end{aligned}$$

- Siden $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{\text{red circle}, \text{green triangle}\}$, kan vi konkludere med **JA**.

Eksempel 2

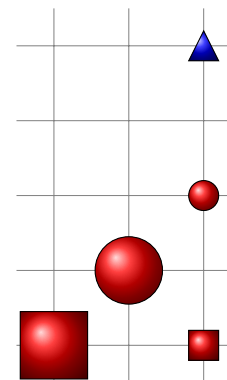


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av \models .

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x) & \\ \iff & \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \text{Stor}(a) & \\ \iff & \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a^{\mathcal{M}} \in \text{Stor}^{\mathcal{M}} & \\ \iff & \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \text{Stor}^{\mathcal{M}} & \end{aligned}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{\text{blue square}, \text{red circle}, \text{green triangle}\}$ og $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{\text{red circle}, \text{green triangle}\}$, så kan vi konkludere med **NEI**.

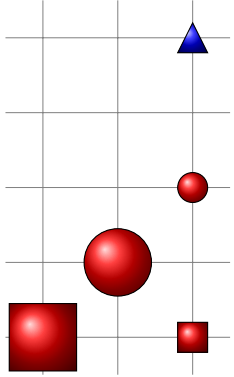
Eksempel 3



$$\begin{aligned} \mathcal{M} \models \forall x (\text{Stor}(x) \rightarrow \text{Sirkel}(x)) & \\ \iff & \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så} & \\ \mathcal{M} \models \text{Stor}(a) \rightarrow \text{Sirkel}(a) & \\ \iff & \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så} & \\ \mathcal{M} \models \text{Stor}(a) \text{ impliserer } \mathcal{M} \models \text{Sirkel}(a) & \\ \iff & \\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så} & \\ \text{hvis } a \in \text{Stor}^{\mathcal{M}}, \text{ så } a \in \text{Sirkel}^{\mathcal{M}} & \\ \iff & \\ \text{“alle store objekter er sirkler”} & \end{aligned}$$

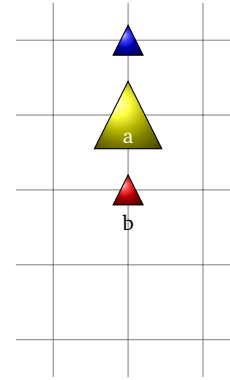
Påstanden holder ikke.

Eksempel 4



$\mathcal{M} \models \forall x(\text{Sirkel}(x) \rightarrow \exists y \exists z \text{Mellom}(x, y, z))$
 \iff
 for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så
 $\mathcal{M} \models \text{Sirkel}(\bar{a}) \rightarrow \exists y \exists z \text{Mellom}(\bar{a}, y, z)$
 \iff
 for alle sirkler $a \in |\mathcal{M}|$ så
 $\mathcal{M} \models \exists y \exists z \text{Mellom}(\bar{a}, y, z)$
 \iff
 for alle sirkler $a \in |\mathcal{M}|$ så
 fins $b, c \in \mathcal{M}$ slik at $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$
Påstanden holder, fordi
 $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(\bar{\text{Sirkel}}, \bar{\text{Sirkel}}, \bar{\text{Sirkel}})$ og
 $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(\bar{\text{Sirkel}}, \bar{\text{Sirkel}}, \bar{\text{Triangel}})$.

Eksempel 5

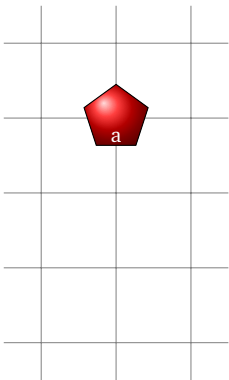


Er følgende formler oppfyllebare samtidig?

1. $\text{Stor}(a) \wedge \text{Liten}(b)$
2. $\forall x(\text{Trekant}(x))$
3. $\forall x(\text{Inntil}(x, a) \vee \text{Inntil}(x, b))$
4. $\neg \exists x(\text{VenstreFor}(x, a) \vee \text{HoyreFor}(x, a))$
5. $\forall x(\text{Stor}(x) \rightarrow \exists y \text{Over}(y, x))$

Svaret er JA!

Eksempel 6



Er følgende formler oppfyllebare?

1. $\neg \text{Sirkel}(a) \wedge \neg \text{Trekant}(a) \wedge \neg \text{Firkant}(a)$

Svaret er JA!

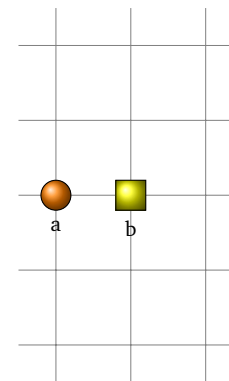
La $|\mathcal{M}| = \{\text{Pentagon}\}$ og $a^{\mathcal{M}} = \text{Pentagon}$.

2. $\text{Liten}(a) \wedge \text{Stor}(a)$

Svaret er JA!

La $|\mathcal{M}| = \{\text{Liten}, \text{Stor}\}$, $a^{\mathcal{M}} = \text{Liten}$ og
 $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{\text{Liten}\}$

Bruke språket til å beskrive modeller



Gi en mengde formler som beskriver denne modellen nøyaktig, dvs. som har denne og (essensielt) ingen andre modeller.

1. $\text{Sirkel}(a) \wedge \text{Firkant}(b)$
2. $\forall x \text{Liten}(x)$
3. $\text{VenstreFor}(a, b)$
4. $\forall x(\text{Inntil}(x, a) \vee \text{Inntil}(x, b))$
5. $\forall x(\neg \text{Over}(x, a) \wedge \neg \text{Under}(x, a))$
6. $\forall x(\neg \text{VenstreFor}(x, a) \wedge \neg \text{HoyreFor}(x, b))$

Ganske vanskelig...