

# INF1800 – Forelesning 20

## Førsteordens logikk

Roger Antonsen - 22. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-22 10:51)

### Mer om førsteordens logikk

#### Tillukninger

- Vi har definert semantikk kun for lukkede formler.
- Det er ikke vanskelig å utvide definisjonen til formler med frie variable; se boka for detaljer.
- Følgende er nyttig når vi har frie variable.

#### Definisjon (Tillukning).

- La  $F$  være en formel med frie variable  $x_1, \dots, x_n$ .
- $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F$  kalles den *universelle tillukningen* av  $F$ .
- $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n F$  kalles den *eksistensielle tillukningen* av  $F$ .

#### Ekvivalens

#### Definisjon (Ekvivalens).

To lukkede førsteordens formler  $A$  og  $B$  er *ekvivalente* hvis enhver modell som gjør  $A$  sann, også gjør  $B$  sann, og vice versa. Sagt på en annen måte, for enhver modell  $\mathcal{M}$ , så vil  $\mathcal{M} \models A$  hvis og bare hvis  $\mathcal{M} \models B$ . Vi skriver  $A \equiv B$  når  $A$  og  $B$  er ekvivalente. En annen vanlig skrivemåte er  $A \Leftrightarrow B$ .

- $A$  og  $B$  er ekvivalente formler hvis og bare hvis formelen  $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$  er gyldig.
- Alle gyldige formler er ekvivalente med hverandre.
- Alle uoppyllbare formler er ekvivalente med hverandre.

#### Kvantorer og negasjon

#### Merk.

- $\neg \forall x F$  er ekvivalent med  $\exists x \neg F$ .
- $\neg \exists x F$  er ekvivalent med  $\forall x \neg F$ .

- Det er en fin øvingsoppgave å bevise disse.
- For å bevise den øverste av dem, må vi bevise følgende.
  1. For alle modeller  $\mathcal{M}$ , hvis  $\mathcal{M} \models \neg\forall xF$ , så  $\mathcal{M} \models \exists x\neg F$ .
  2. For alle modeller  $\mathcal{M}$ , hvis  $\mathcal{M} \models \exists x\neg F$ , så  $\mathcal{M} \models \neg\forall xF$ .
- Vi nøyer oss med å vise 1; resten er øvingsoppgaver.
- For å vise 1, la  $\mathcal{M}$  være en modell slik at  $\mathcal{M} \models \neg\forall xF$ .
- Da er det slik at  $\mathcal{M} \not\models \forall xF$ , det vil si, det *ikke* er slik at  $\mathcal{M} \models \forall xF$ .
- Da fins et element  $a$  i domenet til  $\mathcal{M}$  slik at  $\mathcal{M} \not\models F[x/\bar{a}]$ .
- Da vil  $\mathcal{M} \models \neg F[x/\bar{a}]$ , og da holder  $\mathcal{M} \models \exists x\neg F$ .

## Distribusjon av kvantorer

### Merk.

- $\exists x(Px \vee Qx)$  er ekvivalent med  $\exists xPx \vee \exists xQx$ .
- $\forall x(Px \wedge Qx)$  er ekvivalent med  $\forall xPx \wedge \forall xQx$ .

- Det er *ikke* slik at  $\forall x(Px \vee Qx)$  er ekvivalent med  $\forall xPx \vee \forall xQx$ .
- Det er *ikke* slik at  $\exists x(Px \wedge Qx)$  er ekvivalent med  $\exists xPx \wedge \exists xQx$ .

### Merk.

- $\exists x(Px \rightarrow Qx)$  er ekvivalent med  $\forall xPx \rightarrow \exists xQx$ .

- $\exists x(Px \rightarrow Qx)$  er ekvivalent med  $\exists x(\neg Px \vee Qx)$ ,  
som er ekvivalent med  $\exists x\neg Px \vee \exists xQx$ ,  
som er ekvivalent med  $\neg\forall xPx \vee \exists xQx$ ,  
som er ekvivalent med  $\forall xPx \rightarrow \exists xQx$ .

## Omdøping av variable

### Merk.

Hvis  $y$  er en variabel som ikke forekommer fri i  $F$ , så holder følgende.

- $\exists xF$  er ekvivalent med  $\exists yF[x/y]$ .
- $\forall xF$  er ekvivalent med  $\forall yF[x/y]$ .

Her er  $F[x/y]$  resultatet av å erstatte alle frie forekomster av  $x$  i  $F$  med  $y$ .

### Eksempel.

- $\exists x P x$  er ekvivalent med  $\exists y P y$ .
  - Her er  $\exists y P x[x/y] = \exists y P y$ , fordi  $P x[x/y] = P y$ .

### Flere ekvivalenser

#### Merk.

Hvis  $x$  er en variabel som ikke forekommer fri i  $F$ , så holder følgende.

- $\forall x F$  er ekvivalent med  $F$ .
- $\forall x (F \wedge G)$  er ekvivalent med  $F \wedge \forall x G$ .
- $\exists x (F \wedge G)$  er ekvivalent med  $F \wedge \exists x G$ .
- $\forall x (F \vee G)$  er ekvivalent med  $F \vee \forall x G$ .
- $\exists x (F \vee G)$  er ekvivalent med  $F \vee \exists x G$ .
- $\forall x (F \rightarrow G)$  er ekvivalent med  $F \rightarrow \forall x G$ .
- $\exists x (F \rightarrow G)$  er ekvivalent med  $F \rightarrow \exists x G$ .
- $\forall x (G \rightarrow F)$  er ekvivalent med  $\exists x G \rightarrow F$ .
- $\exists x (G \rightarrow F)$  er ekvivalent med  $\forall x G \rightarrow F$ .

Vi kan “dytte kvantoren innover”.

### Preneks normalform

#### Definisjon.

En lukket førsteordens formel er på *preneks normalform (PNF)* hvis den er på formen

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n F$$

hvor  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  og  $F$  er kvantorfri.

**Eksempel.**

Følgende formler er på preneks normalform.

- $Pa$
- $\forall xPx$
- $\forall x\exists y(Rxy \wedge Ryx)$

**Eksempel.**

Følgende formler er *ikke* på preneks normalform.

- $Pa \wedge \forall xQx$
- $\forall x(Px \rightarrow \exists yRxy)$
- $\forall x(\forall yRxy \rightarrow \forall zSxz)$

**Teorem.**

Enhver lukket førsteordens formel er ekvivalent med en lukket førsteordens formel på preneks normalform.

- Hvis  $F$  er en lukket førsteordens formel, så kan vi konstruere en ekvivalent formel på preneks normalform på følgende måte.
  1. Omdøp alle variable slik at ingen kvantorer binder samme variabel.
  2. Flytt kvantorene utover ved hjelp av ekvivalensene vi har sett på.

**Eksempel.**

$$\begin{aligned}
 (Pa \wedge (\forall xQx \vee \forall xRx)) &\equiv (Pa \wedge (\forall xQx \vee \forall yRy)) \\
 &\equiv (Pa \wedge \forall x(Qx \vee \forall yRy)) \\
 &\equiv (Pa \wedge \forall x\forall y(Qx \vee Ry)) \\
 &\equiv \forall x(Pa \wedge \forall y(Qx \vee Ry)) \\
 &\equiv \forall x\forall y(Pa \wedge (Qx \vee Ry))
 \end{aligned}$$

## Litt om å føre bevis

### Bevisteknikker

- Siden noe av det viktigste vi gjør i dette kurset er å bevise påstander, kan det være greit å si noe om hvordan vi gjør det.

#### Oppgave.

Vis at hvis  $\boxed{1}$ , så  $\boxed{2}$ .

1. Et direkte bevis. Forsøk alltid dette først.
  - Anta  $\boxed{1}$  og vis klart og tydelig hvorfor denne antakelsen fører til  $\boxed{2}$ .
2. Et motsigelsesbevis. Hvis et direkte bevis ikke er mulig.
  - Anta for motsigelse at påstanden ikke holder, dvs. at  $\boxed{1}$  og ikke  $\boxed{2}$ .
  - Vis klart og tydelig hvorfor denne antakelsen fører til en motsigelse.
  - Konkluder med at påstanden må holde.
3. Et bevis for den kontrapositive påstanden: hvis ikke  $\boxed{2}$ , så ikke  $\boxed{1}$ .
  - Dette er essensielt det samme som en motsigelsesbevis.

### Direkte versus indirekte bevis

#### Noen fordeler med direkte bevis:

- Er som regel enklere å lese.
- Kan inneholde mer informasjon.
- Er mer konstruktivt.
- Kan gi mer intuisjon om grunnene for at noe holder.

#### Noen fordeler med motsigelsesbevis:

- Kan være enklere å gjennomføre.
- Kan være kortere enn direkte bevis.

### Å vise at noe ikke holder

#### Oppgave.

Vis at ikke  $\boxed{X}$ .

- Anta  $\boxed{X}$  og vis klart og tydelig hvorfor denne antakelsen fører til en motsigelse.
- Dette er *ikke* et motsigelsesbevis, men et *direkte* bevis.

$$\begin{array}{cc} \neg A & A \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\perp}{A} & \frac{\perp}{\neg A} \end{array}$$

## Noen tommelfingerregler

### Oppgave.

Vis at  $\boxed{X}$ .

Noen tommelfingerregler:

1. Sjekk at du behersker alle begrepene som er brukt.
2. Vær klar og tydelig i argumentasjonen.
3. Bruk alle antakelsene.
4. Vis at antakelsene nødvendigvis medfører konklusjonen.
5. Forsøk først med et direkte bevis.

### Bevis for “for alle”-påstander

- Se på påstanden “For alle  $x$  i  $S$ , så er det slik at  $P(x)$ ”.
- Vi kan vise denne påstanden ved å vise at  $P(a)$  holder for hvert element  $a$  i  $S$ .
- Men hva hvis  $S$  er svært stor eller uendelig?
- Vi kan *generalisere fra et vilkårlig element*:
  - Velg et *vilkårlig* element  $a \in S$ .
  - Vis at  $P(a)$  holder.
  - Siden  $a$  var tilfeldig valgt, så må påstanden holde.