INF1800 – Logikk og beregnbarhet

Forelesning 20: Førsteordens logikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

22. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-22 10:51)

Mer om førsteordens logikk

Tillukninger

- Vi har definert semantikk kun for lukkede formler.
- Det er ikke vanskelig å utvide definisjonen til formler med frie variable; se boka for detaljer.
- Følgende er nyttig når vi har frie variable.

Definisjon (Tillukning)

- La F være en formel med frie variable $x_1, \ldots, x_n$.
- $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n F$ kalles den universelle tillukningen av F.
- $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n F$ kalles den eksistensielle tillukningen av F.

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens)

To lukkede førsteordens formler A og B er ekvivalente hvis enhver modell som gjør A sann, også gjør B sann, og vice versa. Sagt på en annen måte, for enhver modell $\mathcal{M}$, så vil $\mathcal{M} \models A$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models B$. Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er ekvivalente. En annen vanlig skrivemåte er $A \Leftrightarrow B$.

- A og B er ekvivalente formler hvis og bare hvis formelen $(A \to B) \land (B \to A)$ er gyldig.
- Alle gyldige formler er ekvivalente med hverandre.
- Alle uoppfyllbare formler er ekvivalente med hverandre.

Kvantorer og negasjon

Merk

- $\neg\forall x F$ er ekvivalent med $\exists x \neg F$.
- $\neg\exists x F$ er ekvivalent med $\forall x \neg F$.

- Det er en fin øvingsoppgave å bevise disse.
- For å bevise den øverste av dem, må vi bevise følgende.
  1. For alle modeller $\mathcal{M}$, hvis $\mathcal{M} \models \neg\forall x F$, så $\mathcal{M} \models \exists x \neg F$.
  2. For alle modeller $\mathcal{M}$, hvis $\mathcal{M} \models \exists x \neg F$, så $\mathcal{M} \models \neg\forall x F$.
- Vi nøyer oss med å vise 1; resten er øvingsoppgaver.
- For å vise 1, la $\mathcal{M}$ være en modell slik at $\mathcal{M} \models \neg\forall x F$.
- Da er det slik at $\mathcal{M} \not\models \forall x F$, det vil si, det *ikke* er slik at $\mathcal{M} \models \forall x F$
- Da fins et element a i domenet til $\mathcal{M}$ slik at $\mathcal{M} \not\models F[x/\bar{a}]$.
- Da vil $\mathcal{M} \models \neg F[x/\bar{a}]$, og da holder $\mathcal{M} \models \exists x \neg F$.

Distribusjon av kvantorer

Merk

- $\exists x(Px \lor Qx)$ er ekvivalent med $\exists x Px \lor \exists x Qx$.
- $\forall x(Px \land Qx)$ er ekvivalent med $\forall x Px \land \forall x Qx$.

- Det er *ikke* slik at $\forall x(Px \lor Qx)$ er ekvivalent med $\forall x Px \lor \forall x Qx$.
- Det er *ikke* slik at $\exists x(Px \land Qx)$ er ekvivalent med $\exists x Px \land \exists x Qx$.

Merk

- $\exists x(Px \to Qx)$ er ekvivalent med $\forall x Px \to \exists x Qx$.

- $\exists x(Px \to Qx)$ er ekvivalent med $\exists x(\neg Px \lor Qx)$,
  som er ekvivalent med $\exists x \neg Px \lor \exists x Qx$,
  som er ekvivalent med $\neg\forall x Px \lor \exists x Qx$,
  som er ekvivalent med $\forall x Px \to \exists x Qx$.

Omdøping av variable

Merk

Hvis y er en variabel som ikke forekommer fri i F, så holder følgende.

- $\exists x F$ er ekvivalent med $\exists y F[x/y]$.
- $\forall x F$ er ekvivalent med $\forall y F[x/y]$.

Her er $F[x/y]$ resultatet av å erstatte alle frie forekomster av x i F med y.

Eksempel

- $\exists x Px$ er ekvivalent med $\exists y Py$.
  - Her er $\exists y Px[x/y] = \exists y Py$, fordi $Px[x/y] = Py$.

Flere ekvivalenser

Merk

Hvis x er en variabel som ikke forekommer fri i F, så holder følgende.

- $\forall x F$ er ekvivalent med F.
- $\forall x(F \land G)$ er ekvivalent med $F \land \forall x G$.
- $\exists x(F \land G)$ er ekvivalent med $F \land \exists x G$.
- $\forall x(F \lor G)$ er ekvivalent med $F \lor \forall x G$.
- $\exists x(F \lor G)$ er ekvivalent med $F \lor \exists x G$.
- $\forall x(F \to G)$ er ekvivalent med $F \to \forall x G$.
- $\exists x(F \to G)$ er ekvivalent med $F \to \exists x G$.
- $\forall x(G \to F)$ er ekvivalent med $\exists x G \to F$.
- $\exists x(G \to F)$ er ekvivalent med $\forall x G \to F$.

Vi kan “dytte kvantoren innover”.

Preneks normalform

Definisjon

En lukket førsteordens formel er på preneks normalform (PNF) hvis den er på formen

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n F$$

hvor $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ og F er kvantorfri.

Eksempel

Følgende formler er på preneks normalform.

- Pa
- $\forall x Px$
- $\forall x \exists y (Rxy \land Ryx)$

Eksempel

Følgende formler er *ikke* på preneks normalform.

- $Pa \land \forall x Qx$
- $\forall x (Px \to \exists y Rxy)$
- $\forall x (\forall y Rxy \to \forall z Sxz)$

Preneks normalform

Teorem

Enhver lukket førsteordens formel er ekvivalent med en lukket førsteordens formel på preneks normalform.

- Hvis F er en lukket førsteordens formel, så kan vi konstruere en ekvivalent formel på preneks normalform på følgende måte.
  1. Omdøp alle variable slik at ingen kvantorer binder samme variabel.
  2. Flytt kvantorene utover ved hjelp av ekvivalensene vi har sett på.

Preneks normalform

Eksempel

$$\begin{aligned}
(Pa \land (\forall x Qx \lor \forall x Rx)) &\equiv (Pa \land (\forall x Qx \lor \forall y Ry)) \\
&\equiv (Pa \land \forall x (Qx \lor \forall y Ry)) \\
&\equiv (Pa \land \forall x \forall y (Qx \lor Ry)) \\
&\equiv \forall x (Pa \land \forall y (Qx \lor Ry)) \\
&\equiv \forall x \forall y (Pa \land (Qx \lor Ry))
\end{aligned}$$

Litt om å føre bevis

Bevisteknikker

- Siden noe av det viktigste vi gjør i dette kurset er å bevise påstander, kan det være greit å si noe om hvordan vi gjør det.

Oppgave

Vis at hvis $\boxed{1}$, så $\boxed{2}$.

1. Et direkte bevis. Forsøk alltid dette først.
   - Anta $\boxed{1}$ og vis klart og tydelig hvorfor denne antakelsen fører til $\boxed{2}$.
2. Et motsigelsesbevis. Hvis et direkte bevis ikke er mulig.
   - Anta for motsigelse at påstanden ikke holder, dvs. at $\boxed{1}$ og ikke $\boxed{2}$.
   - Vis klart og tydelig hvorfor denne antakelsen fører til en motsigelse.
   - Konkluder med at påstanden må holde.
3. Et bevis for den kontrapositive påstanden: hvis ikke $\boxed{2}$, så ikke $\boxed{1}$.
   - Dette er essensielt det samme som en motsigelsesbevis.

Direkte versus indirekte bevis

Noen fordeler med direkte bevis:

- Er som regel enklere å lese.
- Kan inneholde mer informasjon.
- Er mer konstruktivt.
- Kan gi mer intuisjon om grunnene for at noe holder.

Noen fordeler med motsigelsesbevis:

- Kan være enklere å gjennomføre.
- Kan være kortere enn direkte bevis.

Å vise at noe ikke holder

Oppgave

Vis at ikke $\boxed{X}$.

- Anta $\boxed{X}$ og vis klart og tydelig hvorfor denne antakelsen fører til en motsigelse.
- Dette er ikke et motsigelsesbevis, men et direkte bevis.

$$\dfrac{\begin{matrix}\neg A\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{A} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}A\\ \vdots\\ \bot\end{matrix}}{\neg A}$$

Noen tommelfingerregler

Oppgave

Vis at $\boxed{X}$.

Noen tommelfingerregler:

1. Sjekk at du behersker alle begrepene som er brukt.
2. Vær klar og tydelig i argumentasjonen.
3. Bruk alle antakelsene.
4. Vis at antakelsene nødvendigvis medfører konklusjonen.
5. Forsøk først med et direkte bevis.

Bevis for “for alle”-påstander

- Se på påstanden “For alle x i S, så er det slik at $P(x)$”.
- Vi kan vise denne påstanden ved å vise at $P(a)$ holder for hvert element a i S.
- Men hva hvis S er svært stor eller uendelig?
- Vi kan generalisere fra et vilkårlig element:
  - Velg et vilkårlig element $a \in S$.
  - Vis at $P(a)$ holder.
  - Siden a var tilfeldig valgt, så må påstanden holde.