



INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 21: FØRSTEORDENS LOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

28. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-28 16:51)

Førsteordens sekventkalkyle

Introduksjon

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**.

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig.

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig.
(Det er **sunnhet** av kalkylen som sikrer oss det.)

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig.
(Det er **sunnhet** av kalkylen som sikrer oss det.)
 2. **Lage motmodeller**.

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig. (Det er **sunnhet** av kalkylen som sikrer oss det.)
 2. **Lage motmodeller**. Hvis et bevis ikke fins, så gir en “maksimal” utledning nok informasjon til å lage en motmodell.

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig. (Det er **sunnhet** av kalkylen som sikrer oss det.)
 2. **Lage motmodeller**. Hvis et bevis ikke fins, så gir en “maksimal” utledning nok informasjon til å lage en motmodell. Dette er essensielt hva man gjør for å vise **kompletthet** av kalkylen.

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig. (Det er **sunnet** av kalkylen som sikrer oss det.)
 2. **Lage motmodeller**. Hvis et bevis ikke fins, så gir en “maksimal” utledning nok informasjon til å lage en motmodell. Dette er essensielt hva man gjør for å vise **kompletthet** av kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig. (Det er **sunnet** av kalkylen som sikrer oss det.)
 2. **Lage motmodeller**. Hvis et bevis ikke fins, så gir en “maksimal” utledning nok informasjon til å lage en motmodell. Dette er essensielt hva man gjør for å vise **kompletthet** av kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ , er φ gyldig?

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig. (Det er **sunnhet** av kalkylen som sikrer oss det.)
 2. **Lage motmodeller**. Hvis et bevis ikke fins, så gir en “maksimal” utledning nok informasjon til å lage en motmodell. Dette er essensielt hva man gjør for å vise **kompletthet** av kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ , er φ gyldig?
- Vi introduserte sekventkalkylen for utsagnslogikk som et systematisk forsøk på å falsifisere.

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
 1. **Finne bevis**. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig. (Det er **sunnhet** av kalkylen som sikrer oss det.)
 2. **Lage motmodeller**. Hvis et bevis ikke fins, så gir en “maksimal” utledning nok informasjon til å lage en motmodell. Dette er essensielt hva man gjør for å vise **kompletthet** av kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ , er φ gyldig?
- Vi introduserte sekventkalkylen for utsagnslogikk som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se hvordan dette blir for førsteordens logikk.

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .

$$\frac{\frac{Pa \rightarrow Qa \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\frac{\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{Pa \rightarrow Qa} \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx)} \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx)} \vdash \quad \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}
 \end{array}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

$$\begin{array}{c}
 \frac{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}{\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \qquad \qquad \qquad Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \hline
 Pa \rightarrow Qa \vdash \qquad \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \hline
 \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \qquad \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \hline
 \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
 \end{array}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

$$\begin{array}{c}
\neg Qa, Pa \vdash Pa \\
\hline
\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa \\
\hline
\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa \qquad \qquad \qquad Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\hline
Pa \rightarrow Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\hline
\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\hline
\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
\end{array}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \hline
 \neg Qa, Pa \vdash Pa \\
 \hline
 \neg Qa \vdash \neg Pa, Pa \\
 \hline
 \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa \qquad \qquad \qquad Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \hline
 Pa \rightarrow Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \hline
 \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \hline
 \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
 \end{array}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\neg Qa, Pa \vdash Pa}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa} \\
 \frac{\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \quad \frac{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}{Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
 \frac{Pa \rightarrow Qa \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
 \end{array}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

$$\begin{array}{c}
 \times \\
 \frac{\neg Qa, Pa \vdash Pa}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa} \\
 \frac{\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
 \frac{Pa \rightarrow Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
 \end{array}
 \qquad
 \frac{Qa \vdash Qa, \neg Pa}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa} \\
 \frac{Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{c}
\times \\
\hline
\neg Qa, Pa \vdash Pa \\
\hline
\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa \\
\hline
\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\times \\
\hline
Qa \vdash Qa, \neg Pa \\
\hline
Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa \\
\hline
Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa
\end{array} \\
\hline
Pa \rightarrow Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\hline
\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
\hline
\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)
\end{array}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
 - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x .
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x .
 - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

- Oppfyll $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ?

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{P_o \rightarrow Q_o \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{P_o \rightarrow Q_o \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{P_o \rightarrow Q_o \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o .

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{\frac{P_o \rightarrow Q_o \vdash \quad \neg Q_a \rightarrow \neg P_a}{P_o \rightarrow Q_o \vdash \forall x(\neg Q_x \rightarrow \neg P_x)}}{\forall x(P_x \rightarrow Q_x) \vdash \forall x(\neg Q_x \rightarrow \neg P_x)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(P_x \rightarrow Q_x)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Q_x \rightarrow \neg P_x)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{\frac{P_o \rightarrow Q_o \vdash \quad \neg Q_a \rightarrow \neg P_a}{P_o \rightarrow Q_o \vdash \forall x(\neg Q_x \rightarrow \neg P_x)}}{\forall x(P_x \rightarrow Q_x) \vdash \forall x(\neg Q_x \rightarrow \neg P_x)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(P_x \rightarrow Q_x)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Q_x \rightarrow \neg P_x)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(P_x \rightarrow Q_x)$. Da må vi kunne sette inn a for x !

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa, Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \quad \forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa \\
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \\
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
 \end{array}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Pa, Po \rightarrow Qo \vdash Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa, Pa} \\
 \frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa} \quad \forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}} \\
 \frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
 \end{array}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Pa, Po \rightarrow Qo \vdash Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Pa, Po \rightarrow Qo \vdash Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
 \end{array}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Pa, Po \rightarrow Qo \vdash Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}
 \end{array}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Pa, Po \rightarrow Qo \vdash Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)} \\
 \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, Po \rightarrow Qo \vdash Qa, \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, \neg Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa, Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}
 \end{array}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
 - Hva skal vi sette inn for x ? Vi bruker en *dummykonstant* o .
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
 - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o . Setter inn a .
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x !
 - Vi må ta kopi av \forall -formelen når vi setter inn for x .
 - Setter inn a for x .
- Vi kan nå anvende α - og β -reglene og lukke.

Motivasjon

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .
- Fra de foregående eksemplene har vi:

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .
- Fra de foregående eksemplene har vi:
 - Hvis vi skal **oppfylle** en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[x/t]$ for alle valg av term t .

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .
- Fra de foregående eksemplene har vi:
 - Hvis vi skal **oppfylle** en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[x/t]$ for alle valg av term t .
 - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .
- Fra de foregående eksemplene har vi:
 - Hvis vi skal **oppfylle** en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[x/t]$ for alle valg av term t .
 - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
 - Hvis vi skal **falsifisere** $\forall x\varphi$ må vi velge et **vitne** – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[x/a]$ er usann.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .
- Fra de foregående eksemplene har vi:
 - Hvis vi skal **oppfylle** en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[x/t]$ for alle valg av term t .
 - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
 - Hvis vi skal **falsifisere** $\forall x\varphi$ må vi velge et **vitne** – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[x/a]$ er usann.
 - Å oppfylle/falsifisere \exists -formler blir dualt.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene \forall/\exists .
- Fra de foregående eksemplene har vi:
 - Hvis vi skal **oppfylle** en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[x/t]$ for alle valg av term t .
 - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
 - Hvis vi skal **falsifisere** $\forall x\varphi$ må vi velge et **vitne** – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[x/a]$ er usann.
 - Å oppfylle/falsifisere \exists -formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som **sekvent**, **aksiom**, **utledning** og **bevis** for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt **parametre**, forskjellige fra symbolene i \mathcal{L} . La \mathcal{L}^{par} være det førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt **parametre**, forskjellige fra symbolene i \mathcal{L} . La \mathcal{L}^{par} være det førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent)

En **sekvent** er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av **lukkede** førsteordens formler i \mathcal{L}^{par} .

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La \mathcal{L} være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt **parametre**, forskjellige fra symbolene i \mathcal{L} . La \mathcal{L}^{par} være det førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent)

En **sekvent** er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av **lukkede** førsteordens formler i \mathcal{L}^{par} .

Definisjon (Aksiom)

Et **aksiom** er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en **atomær** formel.

Sekventkalkyleregler

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

γ -reglene i sekventkalkylen LK er

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

γ -reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

γ -reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[x/t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

γ -reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[x/t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

hvor t er en **lukket** term.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

γ -reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[x/t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

hvor t er en **lukket** term.

- Termen t kan være hvilken som helst lukket term.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ -regler)

γ -reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[x/t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

hvor t er en **lukket** term.

- Termen t kan være hvilken som helst lukket term.
- Kopieringen av hovedformelen i γ -reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere.

Sekventkalkyleregler

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ -regler)

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ -regler)

δ -reglene i sekventkalkylen LK er

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ -regler)

δ -reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \varphi[x/a] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ -regler)

δ -reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \varphi[x/a] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} R\forall$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ -regler)

δ -reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \varphi[x/a] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} R\forall$$

hvor a er en parameter som **ikke** forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ -regler)

δ -reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \varphi[x/a] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} L\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} R\forall$$

hvor a er en parameter som **ikke** forekommer i konklusjonen.

- Uten kravet om at a ikke skal være i konklusjonen får vi en usunn kalkyle.

Sekventkalkyleregler

Sekventkalkyleregler

- γ -reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.

Sekventkalkyleregler

- γ -reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ -reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.

Sekventkalkyleregler

- γ -reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ -reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.

Sekventkalkyleregler

- γ -reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ -reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ - og δ -reglene er derfor **veldefinerte** i den forstand at alle sekvenser forblir lukket.

Sekventkalkyleregler

- γ -reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ -reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ - og δ -reglene er derfor **veldefinerte** i den forstand at alle sekvenser forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Sekventkalkyleregler

- γ -reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ -reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ - og δ -reglene er derfor **veldefinerte** i den forstand at alle sekvenser forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Slutningsreglene i førsteordens LK er α - og β -reglene fra utsagnslogisk LK **og** γ - og δ -reglene.

Slutninger

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

L \forall -regel

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\forall$$

L \forall -slutning

$$\frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} \text{L}\forall$$

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

L \forall -regel

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\forall$$

L \forall -slutning

$$\frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} \text{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$L\forall$ -regel

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$L\forall$ -slutning

$$\frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} L\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
 - Sekventene *over* streken kalles **premisser**.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$L\forall$ -regel

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$L\forall$ -slutning

$$\frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} L\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
 - Sekventene *over* streken kalles **premisser**.
 - Sekventen *under* streken kalles **konklusjon**.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

L \forall -regel

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\forall$$

L \forall -slutning

$$\frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} \text{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
 - Sekventene *over* streken kalles **premisser**.
 - Sekventen *under* streken kalles **konklusjon**.
 - Teksten til høyre for streken er regelens **navn**.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$L\forall$ -regel

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$L\forall$ -slutning

$$\frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} L\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
 - Sekventene *over* streken kalles **premisser**.
 - Sekventen *under* streken kalles **konklusjon**.
 - Teksten til høyre for streken er regelens **navn**.
 - Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles **hovedformel**.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$L\forall$ -regel

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$L\forall$ -slutning

$$\frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} L\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
 - Sekventene *over* streken kalles **premisser**.
 - Sekventen *under* streken kalles **konklusjon**.
 - Teksten til høyre for streken er regelens **navn**.
 - Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles **hovedformel**.
 - Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles **aktive formler**.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene **slutninger** ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$L\forall$ -regel

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} L\forall$$

$L\forall$ -slutning

$$\frac{Pa, \forall x (Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x (Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} L\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
 - Sekventene *over* streken kalles **premisser**.
 - Sekventen *under* streken kalles **konklusjon**.
 - Teksten til høyre for streken er regelens **navn**.
 - Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles **hovedformel**.
 - Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles **aktive formler**.
 - Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles **ekstraformler**.

Utleddninger

Utleddninger

- Utleddninger er definert som for utsagnslogikk, men

Utleddninger

- Utleddninger er definert som for utsagnslogikk, men
 - vi har to ekstra regler, γ - og δ -reglene, og

Utleddninger

- Utleddninger er definert som for utsagnslogikk, men
 - vi har to ekstra regler, γ - og δ -reglene, og
 - basistilfellet i definisjonen av LK-utleddninger er litt annerledes.

Utleddninger

- Utleddninger er definert som for utsagnslogikk, men
 - vi har to ekstra regler, γ - og δ -reglene, og
 - basistilfellet i definisjonen av LK-utleddninger er litt annerledes.

Definisjon (LK-utleddninger – basistilfelle)

Utleddninger

- **Utleddninger** er definert som for utsagnslogikk, men
 - vi har to ekstra regler, γ - og δ -reglene, og
 - basistilfellet i definisjonen av LK-utleddninger er litt annerledes.

Definisjon (LK-utleddninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i \mathcal{L} , er en **LK-utledning**.

Utledninger

- **Utledninger** er definert som for utsagnslogikk, men
 - vi har to ekstra regler, γ - og δ -reglene, og
 - basistilfellet i definisjonen av LK-utledninger er litt annerledes.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i \mathcal{L} , er en **LK-utledning**.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Utledninger

- **Utledninger** er definert som for utsagnslogikk, men
 - vi har to ekstra regler, γ - og δ -reglene, og
 - basistilfellet i definisjonen av LK-utledninger er litt annerledes.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i \mathcal{L} , er en **LK-utledning**.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

Utledninger

- **Utledninger** er definert som for utsagnslogikk, men
 - vi har to ekstra regler, γ - og δ -reglene, og
 - basistilfellet i definisjonen av LK-utledninger er litt annerledes.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i \mathcal{L} , er en **LK-utledning**.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Språket \mathcal{L}^{par} brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ -reglene.

Utleddninger

- **Utleddninger** er definert som for utsagnslogikk, men
 - vi har to ekstra regler, γ - og δ -reglene, og
 - basistilfellet i definisjonen av LK-utleddninger er litt annerledes.

Definisjon (LK-utleddninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i \mathcal{L} , er en **LK-utledning**.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Språket \mathcal{L}^{par} brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ -reglene.
- Resten er som for utsagnslogikk.

Utleddninger

- **Utleddninger** er definert som for utsagnslogikk, men
 - vi har to ekstra regler, γ - og δ -reglene, og
 - basistilfellet i definisjonen av LK-utleddninger er litt annerledes.

Definisjon (LK-utleddninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i \mathcal{L} , er en **LK-utledning**.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Språket \mathcal{L}^{par} brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ -reglene.
- Resten er som for utsagnslogikk.
- Slutninger brukes til å *utvide* utleddninger.

Bevis

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **LK-bevisbar** hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **LK-bevisbar** hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Definisjon (Bevisbar formel)

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **LK-bevisbar** hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Definisjon (Bevisbar formel)

Et **bevis** for en formel φ er et bevis for sekventen $\vdash \varphi$.

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et **LK-bevis** er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er **LK-bevisbar** hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Definisjon (Bevisbar formel)

Et **bevis** for en formel φ er et bevis for sekventen $\vdash \varphi$. En formel φ er **bevisbar** hvis det fins en bevis for den.

Sunnhet og kompletthet

Sunnhet og kompletthet

- Vi har følgende teoremer om førsteordens sekventkalkyle.

Sunnhet og kompletthet

- Vi har følgende teoremer om førsteordens sekventkalkyle.

Teorem (Sunnhet)

Enhver bevisbar sekvent er gyldig.

Sunnhet og kompletthet

- Vi har følgende teoremer om førsteordens sekventkalkyle.

Teorem (Sunnhet)

Enhver bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem (Kompletthet)

Enhver gyldig sekvent er bevisbar.

Sunnhet og kompletthet

- Vi har følgende teoremer om førsteordens sekventkalkyle.

Teorem (Sunnhet)

Enhver bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem (Kompletthet)

Enhver gyldig sekvent er bevisbar.

- Vi skal ikke bevise disse i dette kurset, men vi skal vite hva som er hva og ha noen intuisjoner om hvorfor det er slik.

Sunnhet og kompletthet

Sunnhet og kompletthet

- Når bruker vi at sekventkalkylen er sunn?

sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i sekventkalkyle

+

sekventkalkylen er **sunn**

=

sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig

Eksempler

Eksempel 1

Eksempel 1

$$\forall xPx \vdash \forall xPx$$

Eksempel 1

$$\frac{\forall xPx \vdash Pa}{\forall xPx \vdash \forall xPx}$$

Eksempel 1

$$\frac{\forall xPx \vdash Pa}{\forall xPx \vdash \forall xPx}$$

Eksempel 1

$$\frac{\frac{\forall xPx, Pa \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa}}{\forall xPx \vdash \forall xPx}$$

Eksempel 1

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall xPx, Pa \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa} \\ \hline \forall xPx \vdash \forall xPx \end{array}$$

Eksempel 1

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall xPx, Pa \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa} \\ \frac{\quad}{\forall xPx \vdash \forall xPx} \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \forall xPx$ er bevisbar.

Eksempel 1

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall xPx, Pa \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa} \\ \hline \forall xPx \vdash \forall xPx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \forall xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.

Eksempel 1

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall xPx, Pa \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa} \\ \hline \forall xPx \vdash \forall xPx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \forall xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.

Eksempel 1

$$\begin{array}{c} \times \\ \hline \forall xPx, Pa \vdash Pa \\ \hline \forall xPx \vdash Pa \\ \hline \forall xPx \vdash \forall xPx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \forall xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Envher modell som oppfyller antesedenten, må oppfylle suksedenten.

Eksempel 2

Eksempel 2

$$\forall xPx \vdash \exists xPx$$

Eksempel 2

$$\frac{\forall xPx \vdash \exists xPx, \text{Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx}$$

Eksempel 2

$$\frac{\forall xPx \vdash \exists xPx, Po}{\forall xPx \vdash \exists xPx}$$

Eksempel 2

$$\frac{\frac{\forall xPx, P_0 \vdash \exists xPx, P_0}{\forall xPx \vdash \exists xPx, P_0}}{\forall xPx \vdash \exists xPx}$$

Eksempel 2

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall xPx, \mathbf{Po} \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}} \\ \frac{\quad}{\forall xPx \vdash \exists xPx} \end{array}$$

Eksempel 2

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall xPx, \mathbf{Po} \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}} \\ \hline \forall xPx \vdash \exists xPx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.

Eksempel 2

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\frac{\forall xPx, \mathbf{Po} \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}}}{\forall xPx \vdash \exists xPx} \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.

Eksempel 2

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\frac{\forall xPx, \mathbf{Po} \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}}}{\forall xPx \vdash \exists xPx} \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.

Eksempel 2

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall xPx, \mathbf{Po} \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}} \\ \hline \forall xPx \vdash \exists xPx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall xPx$ sann.

Eksempel 2

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall xPx, \mathbf{Po} \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}} \\ \hline \forall xPx \vdash \exists xPx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall xPx$ sann.
 - Domenet må bestå av minst ett element e .

Eksempel 2

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\frac{\forall xPx, P_0 \vdash \exists xPx, P_0}{\forall xPx \vdash \exists xPx, P_0}}{\forall xPx \vdash \exists xPx} \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall xPx$ sann.
 - Domenet må bestå av minst ett element e .
 - Siden \mathcal{M} gjør $\forall xPx$ sann, må \mathcal{M} gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.

Eksempel 2

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall xPx, \mathbf{Po} \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, \mathbf{Po}} \\ \hline \forall xPx \vdash \exists xPx \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall xPx$ sann.
 - Domenet må bestå av minst ett element e .
 - Siden \mathcal{M} gjør $\forall xPx$ sann, må \mathcal{M} gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
 - Siden \mathcal{M} gjør $P\bar{e}$ sann, må \mathcal{M} gjøre formelen $\exists xPx$ sann.

Eksempel 3

Eksempel 3

$$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$$

Eksempel 3

$$\frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \qquad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}$$

Eksempel 3

$$\frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \qquad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}$$

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \quad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}}$$

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px} \quad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Qx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall x Px \wedge \forall x Qx}}$$

Eksempel 3

$$\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa$$

$$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa$$

$$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx$$
$$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx$$

$$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$$

Eksempel 3

$$\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa$$

$$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa$$

$$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx$$
$$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx$$

$$\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$$

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \quad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \qquad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx \\ \hline \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \quad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx} \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \qquad \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx} \\ \hline \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \qquad \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx} \\ \hline \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx} \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx} \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx} \end{array}$$

Eksempel 3

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \\ \hline \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \\ \frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx} \\ \hline \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx \end{array}$$

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}}$$

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$ er bevisbar.

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall x(Px \wedge Qx)$ sann.

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall x(Px \wedge Qx)$ sann.
 - Velg et vilkårlig element e i domenet til \mathcal{M} .

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx} \times$$
$$\frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \quad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall x(Px \wedge Qx)$ sann.
 - Velg et vilkårlig element e i domenet til \mathcal{M} .
 - Ved antakelsen må \mathcal{M} gjøre $P\bar{e} \wedge Q\bar{e}$ sann.

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall x(Px \wedge Qx)$ sann.
 - Velg et vilkårlig element e i domenet til \mathcal{M} .
 - Ved antakelsen må \mathcal{M} gjøre $P\bar{e} \wedge Q\bar{e}$ sann.
 - Da må \mathcal{M} gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.

Eksempel 3

$$\frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Pa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx} \quad \frac{\frac{\frac{\forall x(Px \wedge Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \wedge Qx), Pa \wedge Qa \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash Qa} \times}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx} \times$$
$$\frac{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \quad \forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\forall x(Px \wedge Qx)$ sann.
 - Velg et vilkårlig element e i domenet til \mathcal{M} .
 - Ved antakelsen må \mathcal{M} gjøre $P\bar{e} \wedge Q\bar{e}$ sann.
 - Da må \mathcal{M} gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
 - Siden e var vilkårlig valgt, må \mathcal{M} også gjøre $\forall xPx$ og $\forall xQx$ sanne.

Eksempel 4

Eksempel 4

$$\exists x \forall y L y x \vdash \forall x \exists y L x y$$

Eksempel 4

$$\frac{\forall yLy\mathbf{a} \vdash \forall x\exists yLxy}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

Eksempel 4

$$\frac{\forall yLy a \vdash \forall x\exists yLxy}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

Eksempel 4

$$\frac{\frac{\forall yLy a \vdash \exists yLby}{\forall yLy a \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

Eksempel 4

$$\frac{\frac{\forall yLy a \vdash \exists yLby}{\forall yLy a \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

Eksempel 4

$$\frac{\frac{\frac{\forall yLy a, Lba \vdash \exists yLby}{\forall yLy a \vdash \exists yLby}}{\forall yLy a \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

Eksempel 4

$$\frac{\frac{\frac{\forall yLy a, Lba \vdash \exists yLby}{\forall yLy a \vdash \exists yLby}}{\forall yLy a \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

Eksempel 4

$$\frac{\frac{\frac{\forall yLy a, Lba \vdash Lba, \exists yLby}{\forall yLy a, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall yLy a \vdash \exists yLby}}{\forall yLy a \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall yLy a, \mathbf{Lba} \vdash \mathbf{Lba}, \exists yLby}{\forall yLy a, Lba \vdash \exists yLby} \\ \frac{\forall yLy a \vdash \exists yLby}{\forall yLy a \vdash \forall x \exists y Lxy} \\ \frac{\forall yLy a \vdash \forall x \exists y Lxy}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy} \end{array}$$

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall yLy_a, Lba \vdash Lba, \exists yLby}{\forall yLy_a, Lba \vdash \exists yLby} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \exists yLby}{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy} \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall yLy_a, \mathbf{Lba} \vdash \mathbf{Lba}, \exists yLby}{\forall yLy_a, Lba \vdash \exists yLby} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \exists yLby}{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy} \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall yLy_a, Lba \vdash Lba, \exists yLby}{\forall yLy_a, Lba \vdash \exists yLby} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \exists yLby}{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy} \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall yLy_a, \mathbf{Lba} \vdash \mathbf{Lba}, \exists yLby}{\forall yLy_a, Lba \vdash \exists yLby} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \exists yLby}{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy} \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \hline \forall yLy_a, Lba \vdash Lba, \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a, Lba \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy \\ \hline \exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
 - Da fins det et element a slik at $\forall yLy_a$ er sann i \mathcal{M} .

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \hline \forall yLy_a, Lba \vdash Lba, \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a, Lba \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy \\ \hline \exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
 - Da fins det et element a slik at $\forall yLy_a$ er sann i \mathcal{M} .
 - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i \mathcal{M} , velg et vilkårlig element b .

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \hline \forall yLy_a, Lba \vdash Lba, \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a, Lba \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy \\ \hline \exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
 - Da fins det et element a slik at $\forall yLy_a$ er sann i \mathcal{M} .
 - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i \mathcal{M} , velg et vilkårlig element b .
 - Det er nok å vise at $\exists yLby$ er sann i \mathcal{M} .

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \hline \forall yLy_a, Lba \vdash Lba, \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a, Lba \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a \vdash \exists yLby \\ \hline \forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy \\ \hline \exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
 - Da fins det et element a slik at $\forall yLy_a$ er sann i \mathcal{M} .
 - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i \mathcal{M} , velg et vilkårlig element b .
 - Det er nok å vise at $\exists yL_b y$ er sann i \mathcal{M} .
 - Vi har at $L_b \bar{a}$ er sann i \mathcal{M} , siden $\forall yLy_a$ er sann i \mathcal{M} .

Eksempel 4

$$\begin{array}{c} \times \\ \frac{\forall yLy_a, Lba \vdash Lba, \exists yLby}{\forall yLy_a, Lba \vdash \exists yLby} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \exists yLby}{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy} \\ \frac{\forall yLy_a \vdash \forall x\exists yLxy}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy} \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er **sunn**, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
 - Anta at modellen \mathcal{M} gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
 - Da fins det et element a slik at $\forall yLy_a$ er sann i \mathcal{M} .
 - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i \mathcal{M} , velg et vilkårlig element b .
 - Det er nok å vise at $\exists yL_b y$ er sann i \mathcal{M} .
 - Vi har at $L_b a$ er sann i \mathcal{M} , siden $\forall yLy_a$ er sann i \mathcal{M} .
 - “Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker.”

Eksempel 5

Eksempel 5

$$\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$$

Eksempel 5

$$\frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y L \color{red} \circ y \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, \text{Loa} \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y \text{Loy} \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, \text{Loa} \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y \text{Loy} \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, Lo \vdash \forall y Ly \mathbf{a}, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lo \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, Lo a \vdash \forall y Ly a, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lo a \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Ly a, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Ly a, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Ly a, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\frac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Ly, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Ly, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}}$$

Eksempel 5

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx} \\ \frac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx} \\ \frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx} \\ \frac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx} \\ \frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx} \end{array}$$

Eksempel 5

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekvenser.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekvenser.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- “Alle liker seg selv og ingen andre.”

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- “Alle liker seg selv og ingen andre.”
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- “Alle liker seg selv og ingen andre.”
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- “Alle liker seg selv og ingen andre.”
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- “Alle liker seg selv og ingen andre.”
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- “Alle liker seg selv og ingen andre.”
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
 - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
 - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- “Alle liker seg selv og ingen andre.”
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
 - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
 - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.
 - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

Eksempel 6

$$\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)$$

Eksempel 6

$$\frac{\vdash P_0 \rightarrow \forall x P_x, \exists x(P_x \rightarrow \forall x P_x)}{\vdash \exists x(P_x \rightarrow \forall x P_x)}$$

Eksempel 6

$$\frac{\vdash \mathbf{Po} \rightarrow \forall x \mathbf{Px}, \exists x(\mathbf{Px} \rightarrow \forall x \mathbf{Px})}{\vdash \exists x(\mathbf{Px} \rightarrow \forall x \mathbf{Px})}$$

Eksempel 6

$$\frac{\text{Po} \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}{\vdash \text{Po} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)} \\ \vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)$$

Eksempel 6

$$\frac{\text{Po} \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}{\vdash \text{Po} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)} \\ \vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)$$

Eksempel 6

$$\frac{\frac{\frac{P_0 \vdash P_a, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}{P_0 \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash P_0 \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}$$

Eksempel 6

$$\frac{\frac{\frac{P_0 \vdash P_a, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}{P_0 \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash P_0 \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}$$

Eksempel 6

$$\frac{\frac{\frac{\text{Po} \vdash \text{Pa}, \text{Pa} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}{\text{Po} \vdash \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\text{Po} \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash \text{Po} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}$$

Eksempel 6

$$\frac{\frac{\frac{P_0 \vdash Pa, Pa \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}{P_0 \vdash Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{P_0 \vdash \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{\vdash P_0 \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\frac{Po, Pa \vdash \forall xPx, Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}{Po \vdash Pa, Pa \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{Po \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash Po \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}$$

Eksempel 6

$$\begin{array}{c} \times \\ \text{Po, Pa} \vdash \forall xPx, \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \text{Pa} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \text{Po} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \end{array}$$

Eksempel 6

$$\begin{array}{c} \times \\ \text{Po, Pa} \vdash \forall xPx, \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \text{Pa} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \text{Po} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)$ er bevisbar.

Eksempel 6

$$\begin{array}{c} \times \\ \text{Po, Pa} \vdash \forall xPx, \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \text{Pa} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \text{Po} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)$ er bevisbar.
- “Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball.”

Eksempel 6

$$\begin{array}{c} \times \\ \text{Po, Pa} \vdash \forall xPx, \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \text{Pa} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \text{Po} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)$ er bevisbar.
- “Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball.”
- Dette er ikke den samme påstanden som:
“Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball.”

Eksempel 6

$$\begin{array}{c} \times \\ \hline \text{Po, Pa} \vdash \forall xPx, \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \text{Pa} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \text{Pa}, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \text{Po} \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \text{Po} \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \\ \hline \vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx) \end{array}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)$ er bevisbar.
- “Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball.”
- Dette er ikke den samme påstanden som:
“Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball.”
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.