INF1800 – Forelesning 21

Førsteordens logikk

Roger Antonsen - 28. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-28 16:50)

Førsteordens sekventkalkyle

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
  1. *Finne bevis*. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig. (Det er sunnhet av kalkylen som sikrer oss det.)
  2. *Lage motmodeller*. Hvis et bevis ikke fins, så gir en "maksimal" utledning nok informasjon til å lage en motmodell. Dette er essensielt hva man gjør for å vise kompletthet av kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Vi introduserte sekventkalkylen for utsagnslogikk som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se hvordan dette blir for førsteordens logikk.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg Qa, Pa \vdash Pa$}
\UnaryInfC{$\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa$}
\UnaryInfC{$\vdash Pa, \neg Qa \rightarrow \neg Pa$}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$Qa \vdash Qa, \neg Pa$}
\UnaryInfC{$Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa$}
\UnaryInfC{$Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa$}
\BinaryInfC{$Pa \rightarrow Qa \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$}
\end{prooftree}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[x/t]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et *vitne* – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[x/a]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som *sekvent*, *aksiom*, *utledning* og *bevis* for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter).
La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt *parametre*, forskjellige fra symbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være det førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent).
En *sekvent* er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av *lukkede* førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Definisjon (Aksiom).
Et *aksiom* er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en *atomær* formel.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler).
γ-reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[x/t] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi, \varphi[x/t]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \exists x \varphi}\ \mathsf{R}\exists$$

hvor t er en *lukket* term.

- Termen t kan være hvilken som helst lukket term.
- Kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere.

Definisjon (δ-regler).
δ-reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \varphi[x/a] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \ \vdash \ \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

hvor a er en parameter som *ikke* forekommer i konklusjonen.

- Uten kravet om at a ikke skal være i konklusjonen får vi en usunn kalkyle.
- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor *veldefinerte* i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK).
Slutningsreglene i førsteordens LK er α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK *og* γ- og δ-reglene.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene *slutninger* ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

L∀-regel

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/t] \ \vdash\ \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash\ \Delta}\ \mathsf{L}\forall$$

L∀-slutning

$$\frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \ \vdash\ Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \ \vdash\ Qa}\ \mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
  - Sekventene *over* streken kalles *premisser*.
  - Sekventen *under* streken kalles *konklusjon*.
  - Teksten til høyre for streken er regelens *navn*.
  - Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles *hovedformel*.
  - Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles *aktive formler*.
  - Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles *ekstraformler*.

Utledninger

- Utledninger er definert som for utsagnslogikk, men
  - vi har to ekstra regler, γ- og δ-reglene, og
  - basistilfellet i definisjonen av LK-utledninger er litt annerledes.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle).
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en LK-*utledning*.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ-reglene.
- Resten er som for utsagnslogikk.
- Slutninger brukes til å *utvide* utledninger.

Bevis

Definisjon (LK-bevis).
Et LK-*bevis* er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar).
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er *LK-bevisbar* hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Definisjon (Bevisbar formel).
Et *bevis* for en formel φ er et bevis for sekventen $\vdash \varphi$. En formel φ er *bevisbar* hvis det fins en bevis for den.

Sunnhet og kompletthet

- Vi har følgende teoremer om førsteordens sekventkalkyle.

Teorem (Sunnhet).
Enhver bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem (Kompletthet).
Enhver gyldig sekvent er bevisbar.

- Vi skal ikke bevise disse i dette kurset, men vi skal vite hva som er hva og ha noen intuisjoner om hvorfor det er slik.
- Når bruker vi at sekventkalkylen er sunn?

$$\begin{gathered}\text{sekventen } \Gamma \vdash \Delta \text{ er bevisbar i sekventkalkyle} \\ + \\ \text{sekventkalkylen er sunn} \\ = \\ \text{sekventen } \Gamma \vdash \Delta \text{ er gyldig}\end{gathered}$$

Eksempler

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er sunn, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
  - Envher modell som oppfyller antesedenten, må oppfylle suksedenten.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall xPx, Po \vdash \exists xPx, Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er sunn, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall xPx$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall xPx$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $P\bar{e}$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $\exists xPx$ sann.

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xQx}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er sunn, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall xPx$ og $\forall xQx$ sanne.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall yLya, Lba \vdash Lba, \exists yLby}}{\forall yLya, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er sunn, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall yLy\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.

- Det er nok å vise at $\exists y L\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
- Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
- "Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker."

Eksempel 5

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdots & \\
\forall x\exists y Lxy, Lbc, Loa & \vdash & Lba, Ldc, \exists x\forall y Lyx \\
\hline
\forall x\exists y Lxy, Lbc, Loa & \vdash & Lba, \forall y Lyc, \exists x\forall y Lyx \\
\hline
\forall x\exists y Lxy, Lbc, Loa & \vdash & Lba, \exists x\forall y Lyx \exists x\forall y Lyx \\
\hline
\forall x\exists y Lxy, \exists y Lby, Loa & \vdash & Lba, \exists x\forall y Lyx \\
\hline
\forall x\exists y Lxy \forall x\exists y Lxy, Loa & \vdash & Lba, \exists x\forall y Lyx \\
\hline
\forall x\exists y Lxy, Loa & \vdash & \forall y Lya, \exists x\forall y Lyx \\
\hline
\forall x\exists y Lxy, Loa & \vdash & \exists x\forall y Lyx \\
\hline
\forall x\exists y Lxy, \exists y Loy & \vdash & \exists x\forall y Lyx \\
\hline
\forall x\exists y Lxy & \vdash & \exists x\forall y Lyx
\end{array}
$$

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x\exists y Lxy \vdash \exists x\forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x\exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x\forall y Lyx$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

$$
\begin{array}{rcl}
 & \times & \\
Po, Pa & \vdash & \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash & Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash & Pa, \exists x(Px \to \forall x Px) \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash & \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
 & \vdash & Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
 & \vdash & \exists x(Px \to \forall x Px)
\end{array}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."
- Dette er ikke den samme påstanden som: "Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball."
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.