INF1800 – Logikk og beregnbarhet

Forelesning 21: Førsteordens logikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

28. oktober 2008

(Sist oppdatert: 2008-10-28 16:50)

Førsteordens sekventkalkyle

Introduksjon

- Sekventkalkyle for utsagnslogikk skal vi nå kunne **godt**.
- Vi har fokusert på to aspekter.
  1. Finne bevis. Hvis et bevis fins, så må rotsekventen være gyldig. (Det er sunnhet av kalkylen som sikrer oss det.)
  2. Lage motmodeller. Hvis et bevis ikke fins, så gir en "maksimal" utledning nok informasjon til å lage en motmodell. Dette er essensielt hva man gjør for å vise kompletthet av kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Vi introduserte sekventkalkylen for utsagnslogikk som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se hvordan dette blir for førsteordens logikk.

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg Qa, Pa \vdash Pa$}
\UnaryInfC{$\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa$}
\UnaryInfC{$\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa$}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$Qa \vdash Qa, \neg Pa$}
\UnaryInfC{$Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa$}
\UnaryInfC{$Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\BinaryInfC{$Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\end{prooftree}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \quad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkyle for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[x/t]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[x/a]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som sekvent, aksiom, utledning og bevis for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt parametre, forskjellige fra symbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være det førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær formel.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK er

$$\dfrac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[x/t]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists$$

hvor t er en lukket term.

- Termen t kan være hvilken som helst lukket term.
- Kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK er

$$\frac{\Gamma, \varphi[x/a] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[x/a]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\,\mathsf{R}\forall$$

hvor a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

- Uten kravet om at a ikke skal være i konklusjonen får vi en usunn kalkyle.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor veldefinerte i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Slutningsreglene i førsteordens LK er α- og β-reglene fra utsagnslogisk LK og γ- og δ-reglene.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

L$\forall$-regel

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[x/t] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall$$

L$\forall$-slutning

$$\frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
  - Sekventene *over* streken kalles premisser.
  - Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
  - Teksten til høyre for streken er regelens navn.
  - Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
  - Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
  - Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Utledninger

- Utledninger er definert som for utsagnslogikk, men
  - vi har to ekstra regler, γ- og δ-reglene, og
  - basistilfellet i definisjonen av LK-utledninger er litt annerledes.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ-reglene.
- Resten er som for utsagnslogikk.
- Slutninger brukes til å *utvide* utledninger.

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Definisjon (Bevisbar formel)

Et bevis for en formel φ er et bevis for sekventen $\vdash \varphi$. En formel φ er bevisbar hvis det fins en bevis for den.

Sunnhet og kompletthet

- Vi har følgende teoremer om førsteordens sekventkalkyle.

Teorem (Sunnhet)

Enhver bevisbar sekvent er gyldig.

Teorem (Kompletthet)

Enhver gyldig sekvent er bevisbar.

- Vi skal ikke bevise disse i dette kurset, men vi skal vite hva som er hva og ha noen intuisjoner om hvorfor det er slik.

Sunnhet og kompletthet

- Når bruker vi at sekventkalkylen er sunn?

$$\begin{array}{c} \text{sekventen } \Gamma \vdash \Delta \text{ er bevisbar i sekventkalkyle} \\ + \\ \text{sekventkalkylen er sunn} \\ = \\ \text{sekventen } \Gamma \vdash \Delta \text{ er gyldig} \end{array}$$

Eksempler

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall xPx, Pa \vdash Pa}}{\forall xPx \vdash Pa}}{\forall xPx \vdash \forall xPx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \forall xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er sunn, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
    - Envher modell som oppfyller antesedenten, må oppfylle suksedenten.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall xPx, Po \vdash \exists xPx, Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx, Po}}{\forall xPx \vdash \exists xPx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall xPx \vdash \exists xPx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er sunn, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
    - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall xPx$ sann.
    - Domenet må bestå av minst ett element e.
    - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall xPx$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
    - Siden $\mathcal{M}$ gjør $P\bar{e}$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $\exists xPx$ sann.

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xQx}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er sunn, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
    - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
    - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
    - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
    - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
    - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall xPx$ og $\forall xQx$ sanne.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall yLya, Lba \vdash Lba, \exists yLby}}{\forall yLya, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Siden sekventkalkylen er sunn, så vet vi at sekventen er gyldig.
- Det er også lett å se direkte at sekventen er også gyldig.
    - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
    - Da fins det et element a slik at $\forall yLy\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
    - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
    - Det er nok å vise at $\exists yL\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
    - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall yLy\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
    - "Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker."

Eksempel 5

$$
\begin{array}{rcl}
 & \vdots & \\
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa & \vdash & Lba, Ldc, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa & \vdash & Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa & \vdash & Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa & \vdash & Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy \forall x \exists y Lxy, Loa & \vdash & Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Loa & \vdash & \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Loa & \vdash & \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy & \vdash & \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy & \vdash & \exists x \forall y Lyx
\end{array}
$$

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Kompletthet sier at det *alltid* fins motmodeller for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

$$
\begin{array}{rcl}
 & \times & \\
Po, Pa & \vdash & \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash & Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash & Pa, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash & \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
 & \vdash & Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px) \\
\hline
 & \vdash & \exists x(Px \to \forall x Px)
\end{array}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."
- Dette er ikke den samme påstanden som:
  "Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball."
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.