

INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 2: MENGDELÆRE

Roger Antonsen



Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

20. august 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-03 12:36)

Mengdelære

Læreboken

- Det meste av det vi gjør her kan leses uavhengig av boken.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
 -  Kapittel 1.2, side 13–35: *Sets*
 -  Kapittel 1.3, side 35–55: *Ordered Structures*

Mengder

Definisjon (Mengde)

- En **mengde** (eng: *set*) er en endelig eller uendelig samling av objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.
- Objektene i en mengde kalles **elementer**.
- Hvis a er element i mengden S , skriver vi $a \in S$.
- Hvis a *ikke* er element i S , skriver vi $a \notin S$.
- To mengder S og T er **like**, $S = T$, hvis de inneholder de samme elementene.
- Hvis både a og b er elementer i S , skriver vi $a, b \in S$.

Mengder

Notasjon

Mengden med elementene a , b , c og d skrives ofte $\{a, b, c, d\}$.

Eksempel

- $\{0, 1\}$ er mengden av digitale verdier en bit kan ha.
- $\{a, c, f, g, k\}$ er en mengde med bokstaver.
- $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$ er mengden av de 10 minste primtallene.
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ er mengden av **naturlige tall**

Mengder

Eksempel

La oss anta at $a, b, c, d, 1, 2, \gamma, \Phi$ alle er forskjellige.

Vi har at følgende holder:

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$
- $1 \in \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $2 \notin \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a, a, b\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \neq \{b, c\}$ (mengdene er **ulike**)

Noen spesielle mengder

Definisjon (Den tomme mengden)

- Den **tomme mengden** (eng: *empty set*) er mengden som ikke inneholder noen elementer.
- Skrives ofte $\{\}$ eller \emptyset .

Definisjon (Singletonmengde)

En **singletonmengde** er en mengde som har nøyaktig ett element.

Eksempel

Både $\{a\}$, $\{b\}$ og $\{b, b\}$ er singletonmengder.

Union – slå sammen mengder

Definisjon (Union)

- **Unionen** (eng: *union*) av to mengder S og T er den mengden som inneholder alle objekter som er element i S eller T .
- Unionen av S og T skrives ofte $S \cup T$.

Eksempel

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$

Snitt – felles elementer

Definisjon (Snitt)

- Hvis S og T er mengder, så er **snittet** (eng: *intersection*) mellom S og T , eller S **snittet med** T , mengden som inneholder alle objekter som er element i både S og T .
- S snittet med T skrives ofte $S \cap T$.

Eksempel

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \emptyset = \emptyset$

Mengdedifferanse – fjerne elementer

Definisjon (Mengdedifferanse)

- Hvis S og T er mengder, så er **mengdedifferansen** (eng: *difference*) mellom S og T , eller S **minus** T , mengden som inneholder alle objekter som er element i S men *ikke* element i T .
- S minus T skrives ofte $S \setminus T$. Boka skriver $S - T$.

Eksempel

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset = \{1, 2, 3\}$
- $\emptyset \setminus \{a, b, c\} = \emptyset$

Delmengder

Definisjon (Delmengde)

- En mengde S er en **delmengde** (eng: *subset*) av en mengde T hvis alle elementer i S også er elementer i T .
- Skrives ofte $S \subseteq T$. Boka skriver $S \subset T$.

Eksempel

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$ (enhver mengde er en delmengde av seg selv)
- $\{a, b, c\} \not\subseteq \{a, b\}$
- $\emptyset \subseteq \{a, b\}$ (den tomme mengden er en delmengde av alle mengder)
- $\{a, b\} \not\subseteq \emptyset$

Mengdebygger

Notasjon

En definisjon på formen

“mengden av alle elementer x slik at x har egenskapen P ”

kan skrives slik

$\{x \mid x \text{ har egenskapen } P\}$.

En slik konstruksjon kalles en **mengdebygger**. Det som er til venstre for streken kan også være sammensatte uttrykk.

Mengdebygger

Eksempel

- $\{n \mid n \in \mathbb{N} \text{ og } n \text{ er partall}\}$ betegner mengden av alle partall.
- $\{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ betegner mengden av alle oddetall.
- $\{x \mid x \text{ er informatikkstudent}\}$ betegner mengden av alle informatikkstudenter.

Mengder av mengder

- Det er også mulig å konstruere mengder som inneholder andre mengder (med visse restriksjoner).

Eksempel

- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \dots\} = \{\{n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{0\}, \{0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \dots\} = \{\{m \mid 0 \leq m \leq n\} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- $\{\{0, 2, 4, 6, \dots\}, \{1, 3, 5, 7, \dots\}\}$

Multimengder

Definisjon (Multimengde)

- En **multimengde** (eng: *bag/multiset*) er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge ignoreres, men hvor hvert objekt kan forekomme flere ganger.
- Multimengder er mengder der antall forekomster av hvert element teller.
- Vi bruker union (\cup), snitt (\cap), mengdedifferanse (\setminus) og delmengderelasjonen (\subseteq) også på multimengder. (I tillegg kan man bruke $+$. Se boka for detaljer.)
- Vi bruker \emptyset om den tomme multimengden.

Multimengder

Notasjon

Multimengden med elementene a , b , c og d skrives ofte med firkantklammer, slik: $[a, b, c, d]$.

Eksempel

- $[a, b, c] = [c, b, a]$
- $[a, b, c, a] \neq [a, b, c]$ (a forekommer ikke like mange ganger)
- $[a, a, b, c] \cup [a, c] = [a, a, b, c]$
- $[a, a, b, c] + [a, c] = [a, a, a, b, c, c]$
- $[a, a, a, b, c] \cap [a, a, d] = [a, a]$
- $[a, a, a, b, c] \setminus [a, a, d] = [a, b, c]$
- $[a, a] \subseteq [a, a, b, c]$, men $[a, a, a] \not\subseteq [a, a, b, c]$

Tupler

Definisjon (Tuppel)

- Et **tuppel** (eng: *tuple*) med n elementer, et n -tuppel, er en samling med n objekter der både innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt teller.
- 0-tuppelet, det tomme tuppelet, skrives $\langle \rangle$
- Et 2-tuppel med to elementer x og y kalles også et (ordnet) **par** (eng: *ordered pair*) og skrives $\langle x, y \rangle$.
- To n -tupler $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ og $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ er **like** hvis for enhver i slik at $1 \leq i \leq n$ vi har at $a_i = b_i$.

Kryssprodukt

Definisjon (Kryssprodukt)

- Hvis S og T er mengder, så er **kryssproduktet** (eng: *cross product*) av S og T mengden av alle par $\langle s, t \rangle$ slik at $s \in S$ og $t \in T$.
- Kryssproduktet av S og T skrives ofte $S \times T$.
- Kryssproduktet av S og T kan skrives slik:
$$S \times T = \{\langle s, t \rangle \mid s \in S \text{ og } t \in T\}$$

Eksempel

- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c \rangle, \langle a, d \rangle, \langle b, c \rangle, \langle b, d \rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{b, c\} = \{\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$
- $\{a\} \times \{1, 2\} = \{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle\}$

Kryssprodukt

Notasjon

- En mengde kan krysses med seg selv: $S \times S$
- $\{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a \rangle, \langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$
- $S \times S \times S$ skrives ofte S^3 .
- Generalisert: $\underbrace{S \times S \times \dots \times S}_n$ skrives S^n .