INF1800 – Logikk og beregnbarhet

Forelesning 3: Mengdelære, Relasjoner, Funksjoner

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

26. august 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-05 12:55)

Repetisjon

Mengder

- Definisjon av en mengde.
  - Innbyrdes rekkefølge og antall forekomster spiller ingen rolle.
- Symboler vi bruker når vi snakker om og regner på mengder:

$$\{\,\} \quad \in \quad \notin \quad = \quad \neq \quad | \quad \ldots \quad \emptyset \quad \cap \quad \cup \quad \setminus \quad \subseteq \quad \times$$

- Noen eksempler:
  - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - $x \in \mathbb{N}$
  - $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ og x er delelig med $3\}$

Multimengder og tupler

- Definisjon av en multimengde.
  - Innbyrdes rekkefølge spiller ingen rolle, men det gjør antall forekomster.
- Noen eksempler:
  - $[k, l, e, m] = [m, e, l, k]$, men $[k, l, e, m] \neq [k, l, e, m, m]$
- En kommentar om union. Med multimengder får vi to typer:
  - $[a, b] \cup [a, b, c] = [a, b, c]$
  - $[a, b] + [a, b, c] = [a, a, b, b, c]$
  - Vi vil kun bruke den siste varianten.
- Definisjon av et n-tuppel.
  - Både innbyrdes rekkefølge og antall forekomster er viktig.
- Noen eksempler:
  - $\{1\} \times \{a, b\} = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle\}$
  - $\{a, b\} \times \{1\} = \{\langle a, 1\rangle, \langle b, 1\rangle\}$

Litt mer mengdelære

Potensmengder

Definisjon (Potensmengde)

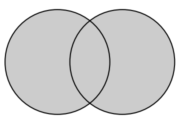
- Hvis S er en mengde, så er potensmengden (eng: *power set*) til S mengden av alle delmengder av S.

Eksempel

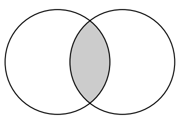
- Potensmengden til $\{1, 2\}$ er $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
- Potensmengden til $\{1, 2, 3\}$ er $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
- Potensmengden til $\{1\}$ er $\{\emptyset, \{1\}\}$.
- Potensmengden til $\emptyset$ er $\{\emptyset\}$.

Venn-diagrammer

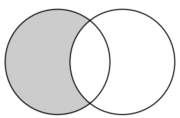
- Venn-diagrammer brukes til å illustrere mengder og operasjoner på mengder. Dette står forklart i boka.
- Vi ser på hvordan noen enkle Venn-diagrammer ser ut for to mengder.



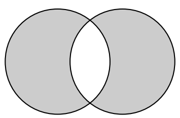
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \setminus B$



$A \oplus B$

Kardinalitet

- Kardinalitet = "størrelsen på en mengde"
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 2.4.1, side 115–116: *Comparing the Size of Sets*
  - Kapittel 2.4.2, side 116–118: *Sets that Are Countable*

Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder S og T har lik kardinalitet (eng: *cardinality*) hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og T.
- Mengden S har kardinalitet mindre eller lik T hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom S og en delmengde av T.
- Hvis S er en endelig mengde, så er kardinaliteten til S lik antall elementer i S.
- Vi bruker notasjonen $|S|$ for kardinaliteten til S.

Kardinalitet

Eksempel

Hva er kardinaliteten til følgende mengder:

- $\{a, b, c\}$ (3)
- $\{a, b, a\}$ (2)
- $\{a\}$ (1)
- $\emptyset$ (0)
- $\mathbb{N}$ (uendelig)

Kardinalitet

Eksempel

- $\mathbb{N}$ = mengden av alle naturlige tall, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- $2\mathbb{N}$ = mengden av alle partall, $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$
- Funksjonen $f(x) = 2x$ gir en en-til-en korrespondanse mellom $\mathbb{N}$ og $2\mathbb{N}$, så $\mathbb{N}$ og $2\mathbb{N}$ har samme kardinalitet. Vi skriver $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$.

Tellbar og overtellbar

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er tellbar (eng: *countable*) hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S overtellbar (eng: *uncountable*). Alle endelige mengder er tellbare.

Eksempel

- Mengden av alle partall er tellbar.
- Mengden av binære tall er tallbar.
- Mengden av brøktall er tellbar.
- Mengden av nålevende mennesker er tellbar.
- Mengden av reelle tall er ikke tellbar.

Relasjoner

Definisjon

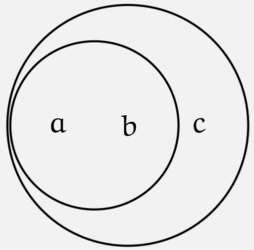
Definisjon (Relasjon)

- En unær relasjon (eng: *unary relation*) på S er en delmengde av S. Kalles også ofte for et predikat (eng: *predicate*).
- En binær relasjon (eng: *binary relation*) fra S til T er en delmengde av $S \times T$.
- En n-ær relasjon (eng: n*-ary relation*) på mengdene $S_1, S_2, \ldots, S_n$ er en delmengde av kryssproduktet $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.
- En n-ær relasjon på en mengde S er en delmengde av S^n.

Eksempler

Eksempel

- Hvis $S = \{a, b, c\}$, så er $\{a, b\}$ en unær relasjon på S.
- Vi kan illustrere dette slik:



Eksempler

Eksempel

- Hvis $S = \{a, b\}$ og $T = \{1, 2\}$, så er $\{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$ en binær relasjon fra S til T.
- Vi kan illustrere dette slik:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & 1 \\ b \arrow[r] & 2 \end{tikzcd}$$

Eksempler

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ er en binær relasjon på S.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[loop right] & \\ 2 \arrow[loop right] & & 3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ er også en binær relasjon på S.

$$\begin{tikzcd} & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[rr] & & 3 \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Eksempler

Eksempel (Flere eksempler på binære relasjoner)

- *Likhetsrelasjonen* på en mengde S, $\{\langle x, x\rangle \mid x \in S\}$.
- *Mindre enn*-relasjonen på f.eks. naturlige tall, $\{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ og } x \leqslant y\}$
- *Foreldrerelasjonen* på f.eks. mengden av mennesker, $\{\langle a, b\rangle | a \text{ er forelder til } b\}$
- *Delmengde*-relasjonen på en mengde av mengder.
- Og så videre.

Egenskaper ved relasjoner

- Vi skal nå se på noen viktige egenskaper ved binære relasjoner:
  - Refleksivitet
  - Symmetri
  - Transitivitet
  - Anti-symmetri
  - Irrefleksivitet
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 4.1, side 194–195: *Properties of Binary Relations*

Refleksivitet

Definisjon (Refleksiv)

En binær relasjon R på mengden S er refleksiv (eng: *reflexive*) hvis det for alle x i S er slik at $\langle x, x\rangle \in R$.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ en refleksiv relasjon på S?
- Hva med $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$?

Symmetri

Definisjon (Symmetrisk)

En binær relasjon R på mengden S er symmetrisk (eng: *symmetric*) hvis det for alle x, y er slik at hvis $\langle x, y\rangle \in R$, så $\langle y, x\rangle \in R$.

Eksempel

La $S = \{a, b, c\}$.

- Er $\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$ en symmetrisk relasjon på S?
- Hva med $\{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle\}$?

Transitivitet

Definisjon (Transitiv)

En binær relasjon R på mengden S er transitiv (eng: *transitive*) hvis det for alle x, y, z er slik at hvis $\langle x, y\rangle \in R$ og $\langle y, z\rangle \in R$, så $\langle x, z\rangle \in R$.

Eksempel

La $S = \{x, y, z\}$.

- Er $\{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle x, z\rangle\}$ en transitiv relasjon på S?
- Hva med $\{\langle x, y\rangle, \langle y, z\rangle, \langle x, z\rangle, \langle y, x\rangle\}$?

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalensrelasjon)

En binær relasjon på mengden S er en ekvivalensrelasjon (eng: *equivalence relation*) hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle\}$ en ekvivalensrelasjon på S?
- Hva med $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$?

Anti-symmetri

Definisjon (Anti-symmetrisk)

En binær relasjon R på mengden S er anti-symmetrisk (eng: *anti-symmetric*) hvis det for alle x, y er slik at hvis $\langle x, y\rangle \in R$ og $\langle y, x\rangle \in R$, så $x = y$.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ en anti-symmetrisk relasjon på S?
- Hva med $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$?

Irrefleksivitet

Definisjon (Irrefleksiv)

En binær relasjon R på mengden S er irrefleksiv (eng: *irreflexive*) hvis det ikke fins noen $x \in S$ slik at $\langle x, x\rangle \in R$.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle\}$ en irrefleksiv relasjon på S?
- Hva med $\{\langle 3, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$?

Eksempler

Vi ser på “er sønnen til”-relasjonen på mengden av alle mennesker.

- Refleksiv? `Nei`, det fins en som ikke er sin egen sønn.
- Symmetrisk? `Nei`, fordi “X er sønnen til Y” ikke medfører at “Y er sønnen til X”.
- Transitiv? `Nei`, “X er sønnen til Y” og “Y er sønnen til Z” ikke medfører at “X er sønnen til Z”.
- Antisymmetrisk? `Ja`, fordi “X er sønnen til Y” og “Y er sønnen til X” aldri er sanne samtidig.
- Irrefleksiv? `Ja`, ingen er sin egen sønn.
- Ekvivalensrelasjon? `Nei`, den er hverken refleksiv, symmetrisk eller transitiv.

Eksempler

Vi ser på “er større enn eller lik”-relasjonen ($\geqslant$) på mengden av reelle tall

- Refleksiv? `Ja`, alle reelle tall er like seg selv.
- Symmetrisk? `Nei`, f.eks. har vi $3 \geqslant 2$, men det er ikke slik at $2 \geqslant 3$.
- Transitiv? `Ja`, hvis $x \geqslant y$ og $y \geqslant z$, så vil $x \geqslant z$.
- Antisymmetrisk? `Ja`, hvis $x \geqslant y$ og $y \geqslant x$, så vil $x = y$.
- Irrefleksiv? `Nei`, f.eks. har vi at $1 \geqslant 1$.
- Ekvivalensrelasjon? `Nei`, den er ikke symmetrisk.

Litt om funksjoner

Læreboken

- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
  - Kapittel 2.1.1, side 74–78: *Definition of a Function*

Funksjoner

Definisjon (Funksjon)

- La A og B være mengder.
- Anta at hvert element i A assosieres med *nøyaktig* ett element i B.
- En slik assosiasjon kalles en funksjon fra A til B.
- Mengdeteoretisk har vi følgende, litt mer presise, definisjon.
- En funksjon fra A til B en binær relasjon f fra A til B slik at for enhver $x \in A$ så fins et unikt element $y \in B$ slik at $\langle x, y \rangle \in f$. Vi skriver $f(x) = y$ når $\langle x, y \rangle \in f$.
- A kalles definisjonsområdet (eng: *domain*) til f.
- B kalles verdiområdet (eng: *codomain*) til f.

Funksjoner

- Det er vanlig å skrive $f : A \to B$ for funksjonen f når den er en funksjon fra A til B.
- $f(x) = y$ kan leses på flere måter, bl.a. slik:
  - "f av x er lik y"
  - "f sender x til y"
  - "f mapper x til y"
  - "f anvendt på x gir y"
- Viktig å huske på:
  - En funksjon kan ikke sende et element i definisjonsområdet til to *forskjellige* elementer i verdiområdet.
  - En funksjon skal sende *ethvert element* i definisjonsområdet til et element i verdiområdet.

Funksjoner

Eksempel

Funksjonen $\mathrm{Par} : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ definert ved

$$\mathrm{Par}(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er et partall} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er et oddetall} \end{cases}$$

har $\mathbb{N}$ som definisjonsmengde og $\{0, 1\}$ som verdimengde.

Operatorer

Definisjon (Operator)

La S være en mengde.

- En unær operator (eng: *unary operator*) på S er en funksjon fra S til S.
- En binær operator (eng: *binary operator*) på S er en funksjon fra $S \times S$ til S.

Eksempel

- Suksessorfunksjonen $(n + 1)$ er en unær operator på $\mathbb{N}$.
- Addisjonsfunksjonen $(+)$ er en binær operator på $\mathbb{N}$.
- Subtraksjonsfunksjonen $(-)$ er en binær operator på $\mathbb{Z}$.