

INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 3: MENGDELÆRE, RELASJONER, FUNKSJONER

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

26. august 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-05 12:55)

Repetisjon

Mengder

- Definisjon av en mengde.
 - Innbyrdes rekkefølge og antall forekomster spiller ingen rolle.
- Symboler vi bruker når vi snakker om og regner på mengder:

$$\{ \} \in \notin = \neq | \dots \emptyset \cap \cup \setminus \subseteq \times$$

- Noen eksempler:
 - $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
 - $x \in \mathbb{N}$
 - $\{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ og } x \text{ er delelig med } 3\}$

Multimengder og tupler

- Definisjon av en multimengde.
 - Innbyrdes rekkefølge spiller ingen rolle, men det gjør antall forekomster.
- Noen eksempler:
 - $[k, l, e, m] = [m, e, l, k]$, men $[k, l, e, m] \neq [k, l, e, m, m]$
- En kommentar om union. Med multimengder får vi to typer:
 - $[a, b] \cup [a, b, c] = [a, b, c]$
 - $[a, b] + [a, b, c] = [a, a, b, b, c]$
 - Vi vil kun bruke den siste varianten.
- Definisjon av et n -tuppel.
 - Både innbyrdes rekkefølge og antall forekomster er viktig.
- Noen eksempler:
 - $\{1\} \times \{a, b\} = \{\langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle\}$
 - $\{a, b\} \times \{1\} = \{\langle a, 1 \rangle, \langle b, 1 \rangle\}$

Litt mer mengdelære

Potensmengder

Definisjon (Potensmengde)

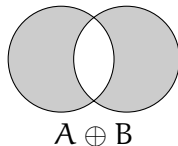
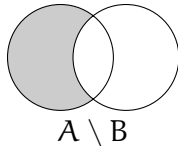
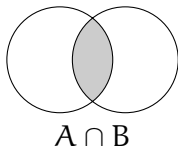
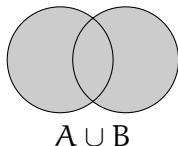
- Hvis S er en mengde, så er **potensmengden** (eng: *power set*) til S mengden av alle delmengder av S .

Eksempel



- Potensmengden til $\{1, 2\}$ er $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.
- Potensmengden til $\{1, 2, 3\}$ er $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.
- Potensmengden til $\{1\}$ er $\{\emptyset, \{1\}\}$.
- Potensmengden til \emptyset er $\{\emptyset\}$.

Venn-diagrammer

- Venn-diagrammer brukes til å illustrere mengder og operasjoner på mengder. Dette står forklart i boka.
- Vi ser på hvordan noen enkle Venn-diagrammer ser ut for to mengder.



Kardinalitet

- Kardinalitet = “størrelsen på en mengde”
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
 -  Kapittel 2.4.1, side 115–116: *Comparing the Size of Sets*
 -  Kapittel 2.4.2, side 116–118: *Sets that Are Countable*

Definisjon (Kardinalitet)

- To mengder S og T har **lik kardinalitet** (eng: *cardinality*) hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og T .
- Mengden S har **kardinalitet mindre eller lik** T hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom S og en delmengde av T .
- Hvis S er en endelig mengde, så er kardinaliteten til S lik antall elementer i S .
- Vi bruker notasjonen $|S|$ for kardinaliteten til S .

Kardinalitet

Eksempel

Hva er kardinaliteten til følgende mengder:

- $\{a, b, c\}$ (3)
- $\{a, b, a\}$ (2)
- $\{a\}$ (1)
- \emptyset (0)
- \mathbb{N} (uendelig)

Kardinalitet

Eksempel

- \mathbb{N} = mengden av alle naturlige tall, $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
- $2\mathbb{N}$ = mengden av alle partall, $\{0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$
- Funksjonen $f(x) = 2x$ gir en en-til-en korrespondanse mellom \mathbb{N} og $2\mathbb{N}$, så \mathbb{N} og $2\mathbb{N}$ har samme kardinalitet. Vi skriver $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$.

Tellbar og overtellbar

Definisjon (Tellbar)

En uendelig mengde S er **tellbar** (eng: *countable*) hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S **overtellbar** (eng: *uncountable*). Alle endelige mengder er tellbare.

Eksempel

- Mengden av alle partall er tellbar.
- Mengden av binære tall er tellbar.
- Mengden av brøktall er tellbar.
- Mengden av nålevende mennesker er tellbar.
- Mengden av reelle tall er **ikke** tellbar.

Relasjoner

Definisjon

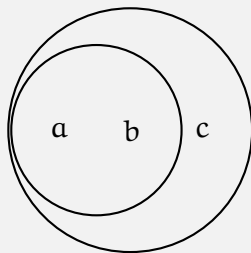
Definisjon (Relasjon)

- En **unær relasjon** (eng: *unary relation*) på S er en delmengde av S . Kalles også ofte for et **predikat** (eng: *predicate*).
- En **binær relasjon** (eng: *binary relation*) fra S til T er en delmengde av $S \times T$.
- En **n -ær relasjon** (eng: *n -ary relation*) på mengdene S_1, S_2, \dots, S_n er en delmengde av kryssproduktet $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$.
- En **n -ær relasjon** på en mengde S er en delmengde av S^n .

Eksempler

Eksempel

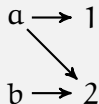
- Hvis $S = \{a, b, c\}$, så er $\{a, b\}$ en unær relasjon på S .
- Vi kan illustrere dette slik:



Eksempler

Eksempel

- Hvis $S = \{a, b\}$ og $T = \{1, 2\}$, så er $\{\langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 2 \rangle\}$ en binær relasjon fra S til T .
- Vi kan illustrere dette slik:



Eksempler

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

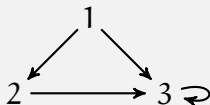
- $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er en binær relasjon på S .

1 ↻

2 ↻

3 ↻

- $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$ er også en binær relasjon på S .




Eksempler

Eksempel (Flere eksempler på binære relasjoner)

- *Likhetsrelasjonen* på en mengde S , $\{\langle x, x \rangle \mid x \in S\}$.
- *Mindre enn-relasjonen* på f.eks. naturlige tall, $\{\langle x, y \rangle \mid x, y \in \mathbb{N} \text{ og } x \leq y\}$
- *Foreldrerelasjonen* på f.eks. mengden av mennesker, $\{\langle a, b \rangle \mid a \text{ er forelder til } b\}$
- *Delmengde-relasjonen* på en mengde av mengder.
- Og så videre.

Egenskaper ved relasjoner

- Vi skal nå se på noen viktige egenskaper ved binære relasjoner:
 - Refleksivitet
 - Symmetri
 - Transitivitet
 - Anti-symmetri
 - Irrefleksivitet
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
 -  Kapittel 4.1, side 194–195: *Properties of Binary Relations*

Refleksivitet

Definisjon (Refleksiv)

En binær relasjon R på mengden S er **refleksiv** (eng: *reflexive*) hvis det for alle x i S er slik at $\langle x, x \rangle \in R$.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle\}$ en refleksiv relasjon på S ?
- Hva med $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$?

Symmetri

Definisjon (Symmetrisk)

En binær relasjon R på mengden S er **symmetrisk** (eng: *symmetric*) hvis det for alle x, y er slik at hvis $\langle x, y \rangle \in R$, så $\langle y, x \rangle \in R$.

Eksempel

La $S = \{a, b, c\}$.

- Er $\{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle c, b \rangle, \langle b, c \rangle\}$ en symmetrisk relasjon på S ?
- Hva med $\{\langle a, b \rangle, \langle b, a \rangle, \langle a, c \rangle\}$?

Transitivitet

Definisjon (Transitiv)

En binær relasjon R på mengden S er **transitiv** (eng: *transitive*) hvis det for alle x, y, z er slik at hvis $\langle x, y \rangle \in R$ og $\langle y, z \rangle \in R$, så $\langle x, z \rangle \in R$.

Eksempel

La $S = \{x, y, z\}$.

- Er $\{\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle, \langle x, z \rangle\}$ en transitiv relasjon på S ?
- Hva med $\{\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle, \langle x, z \rangle, \langle y, x \rangle\}$?

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalensrelasjon)

En binær relasjon på mengden S er en **ekvivalensrelasjon** (eng: *equivalence relation*) hvis den er reflektiv, symmetrisk og transitiv.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle\}$ en ekvivalensrelasjon på S ?
- Hva med $\{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 2 \rangle\}$?

Anti-symmetri

Definisjon (Anti-symmetrisk)

En binær relasjon R på mengden S er **anti-symmetrisk** (eng: *anti-symmetric*) hvis det for alle x, y er slik at hvis $\langle x, y \rangle \in R$ og $\langle y, x \rangle \in R$, så $x = y$.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$ en anti-symmetrisk relasjon på S ?
- Hva med $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 3 \rangle\}$?

Irrefleksivitet

Definisjon (Irrefleksiv)

En binær relasjon R på mengden S er **irrefleksiv** (eng: *irreflexive*) hvis det ikke fins noen $x \in S$ slik at $\langle x, x \rangle \in R$.

Eksempel

La $S = \{1, 2, 3\}$.

- Er $\{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle\}$ en irrefleksiv relasjon på S ?
- Hva med $\{\langle 3, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}$?

Eksempler

Vi ser på “er sønnen til”-relasjonen på mengden av alle mennesker.

- Refleksiv? **Nei**, det fins en som ikke er sin egen sønn.
- Symmetrisk? **Nei**, fordi “X er sønnen til Y” ikke medfører at “Y er sønnen til X”.
- Transitiv? **Nei**, “X er sønnen til Y” og “Y er sønnen til Z” ikke medfører at “X er sønnen til Z”.
- Antisymmetrisk? **Ja**, fordi “X er sønnen til Y” og “Y er sønnen til X” aldri er sanne samtidig.
- Irrefleksiv? **Ja**, ingen er sin egen sønn.
- Ekvivalensrelasjon? **Nei**, den er hverken refleksiv, symmetrisk eller transitiv.

Eksempler

Vi ser på “er større enn eller lik”-relasjonen (\geq) på mengden av reelle tall

- Refleksiv? **Ja**, alle reelle tall er like seg selv.
- Symmetrisk? **Nei**, f.eks. har vi $3 \geq 2$, men det er ikke slik at $2 \geq 3$.
- Transitiv? **Ja**, hvis $x \geq y$ og $y \geq z$, så vil $x \geq z$.
- Antisymmetrisk? **Ja**, hvis $x \geq y$ og $y \geq x$, så vil $x = y$.
- Irrefleksiv? **Nei**, f.eks. har vi at $1 \geq 1$.
- Ekvivalensrelasjon? **Nei**, den er ikke symmetrisk.

Litt om funksjoner

Læreboken

- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.



Kapittel 2.1.1, side 74–78: *Definition of a Function*

Funksjoner

Definisjon (Funksjon)

- La A og B være mengder.
- Anta at hvert element i A assosieres med *nøyaktig* ett element i B .
- En slik assosiasjon kalles en **funksjon** fra A til B .
- Mengdeteoretisk har vi følgende, litt mer presise, definisjon.
- En **funksjon** fra A til B er en binær relasjon f fra A til B slik at for enhver $x \in A$ så fins et **unikt** element $y \in B$ slik at $\langle x, y \rangle \in f$. Vi skriver $f(x) = y$ når $\langle x, y \rangle \in f$.
- A kalles **definisjonsområdet** (eng: *domain*) til f .
- B kalles **verdiområdet** (eng: *codomain*) til f .

Funksjoner

- Det er vanlig å skrive $f : A \rightarrow B$ for funksjonen f når den er en funksjon fra A til B .
- $f(x) = y$ kan leses på flere måter, bl.a. slik:
 - “ f av x er lik y ”
 - “ f sender x til y ”
 - “ f mapper x til y ”
 - “ f anvendt på x gir y ”
- Viktig å huske på:
 - En funksjon kan ikke sende et element i definisjonsområdet til to *forskjellige* elementer i verdiområdet.
 - En funksjon skal sende *ethvert element* i definisjonsområdet til et element i verdiområdet.

Funksjoner

Eksempel

Funksjonen $\text{Par} : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ definert ved

$$\text{Par}(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x \text{ er et partall} \\ 0 & \text{hvis } x \text{ er et oddetall} \end{cases}$$

har \mathbb{N} som definisjonsmengde og $\{0, 1\}$ som verdimengde.

Operatorer

Definisjon (Operator)

La S være en mengde.

- En **unær operator** (eng: *unary operator*) på S er en funksjon fra S til S .
- En **binær operator** (eng: *binary operator*) på S er en funksjon fra $S \times S$ til S .

Eksempel

- Suksessorfunksjonen $(n + 1)$ er en unær operator på \mathbb{N} .
- Addisjonsfunksjonen $(+)$ er en binær operator på \mathbb{N} .
- Subtraksjonsfunksjonen $(-)$ er en binær operator på \mathbb{Z} .