

INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 4: UTSAGNSLOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

27. august 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-03 12:39)

Før vi begynner

Praktiske opplysninger

- Kursets hjemmeside blir stadig oppdatert:
<http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/INF1800/h08/>
- Undervisningsplanen og forelesningsnotatene:
</undervisningsplan.xml>
- Oppgaver til gruppetimene: </oppgaver.html>
- Ressurser: </ressurser.html>
- Beskjeder: </beskjeder.xml>
- Spørreskjema kommer!
- Obligatorisk oppgave 1 – innlevering to uker fra fredag.

Forelesningene og læreboken

- I denne delen legger vi mest vekt på [forelesningsnotatene](#).
- Forelesningsnotatene kan leses helt uavhengig av boken.
- Noen steder vil vi være mer presis enn boken, og andre steder vil boken si mer enn det vi gjør her.
- Følgende avsnitt i boken regnes som pensum.
 - 📖 Kapittel 1.1.1, side 2–5: *Logical Statements*
 - 📖 Kapittel 6.1, side 345–348: *How Do We Reason?*
 - 📖 Kapittel 6.2, side 348–369: *Propositional Calculus*
 - 📖 Kapittel 6.5, side 394–395: *Chapter Summary*

Utsagnslogikk

Utsagnslogikk handler om utsagn

- Temaet for de neste ukene er **utsagnslogikk**.
- Hva er et utsagn?
- La oss definere det!

Definisjon (Utsagn)

Et **utsagn** (eng: *proposition*) er noe som enten er sant eller usant.

- Dette “noe” kan være en **setning**, **ytring** eller **meningsinnholdet** til slike.
- Vi skal ikke gå nærmere inn på den filosofiske analysen av hva et utsagn er. Vi skal være ganske liberale i hva vi anser som utsagn.

Sånt som ikke er utsagn

Følgende er setninger/ytringer som ikke er utsagn.

- *Når er eksamen?*
- *Hipp, hipp, hurra!*
- *Kom hit!*
- *Måtte nysgjerrigheten blant studentene blomstre.*

Et nyttig prinsipp for å **forstå** noe er å også forstå *det motsatte*, i dette tilfellet hva et utsagn *ikke* er!

- Det viktige når vi betrakter noe som et utsagn, er at vi ser bort fra alt annet enn egenskapen at den vil være **sann** eller **usann**.

Atomære utsagn

- Vi starter med en mengde **atomære** (eng: *atomic*) utsagn, f.eks.
 - *Matematikk er spennende.*
 - *Uten mat og drikker, duger helten ikke.*
 - *Foreleseren kan sjonglere.*
 - *Det fins mengder som ikke er tellbare.*
 - *Studenter drikker for mye.*
 - $5 + 6 = 4$
- Den interne strukturen til atomære utsagn blir ikke analysert.
- Etter hvert skal vi lære første-ordens logikk, og da skal vi analysere utsagn i større detalj.

Syntaks for atomære utsagn: Utsagnsvariable

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av **utsagnsvariable** (eng: *propositional variables*) er en tellbart uendelig mengde $\{P, Q, R, \dots\}$ av symboler.

- Utsagnsvariable representerer **atomære utsagn**.
- Nøyaktig hva som er i mengden av utsagnsvariable er ikke så nøye. Det som er viktig er at vi har *nok* utsagnsvariable til å uttrykke det vi ønsker.
- Mengden av utsagnsvariable er en del av **syntaksen** til utsagnslogikk. I utgangspunktet kan symbolene bety hva som helst.

Sammensatte utsagn

- Fra atomære utsagn kan vi bygge opp **sammensatte** utsagn ved hjelp av **logiske bindeord**, som f.eks.:
og eller ikke hvis...så...
- Eksempler:
 - *Studenter drikker for mye og $5 + 6 = 4$*
 - *Hvis matematikk er spennende, så er fysikk spennende.*
 - *Jeg er glad eller jeg er ikke glad.*
- Vi skal bl.a. se på følgende spørsmål:
 - Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?
 - Hvilke utsagn er sanne *uavhengig* av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene? (Slike utsagn kalles **tautologier**.)

Syntaks for sammensatte utsagn

- For å fange slike inn sammensatte utsagn, f.eks.
Hvis man trener, så blir man sterk.
trenger vi altså flere symboler i språket.
- I dette tilfellet har vi to naturlige *atomære* utsagn:
 - *man trener*
 - *man blir sterk*
- Disse utsagnene kan **representeres** ved hjelp av utsagnsvariablene T og S, henholdsvis.
- Det sammensatte utsagnet kan representeres ved hjelp av den **utsagnslogiske formelen** $(T \rightarrow S)$.
- Dette skal vi se nærmere på nå.

Konnektiver

Definisjon (Konnektiv)

De **logiske konnektivene** (eng: *connective*) er $\wedge, \vee, \rightarrow$ og \neg .

- Intuisjonen bak disse er følgende:
 - \neg skal bety *ikke*
 - \wedge skal bety *og*
 - \vee skal bety *eller*
 - \rightarrow skal bety *impliserer* eller *hvis-så*
- Konnektivene er en del av **syntaksen**; de er **symboler** vi skal bruke for å sette mindre formler (fra utsagnsvariable) sammen til større.
- Vi skal også bruke parenteser som hjelpesymboler.

Utsagnslogiske formler

- Vi skal nå definere mengden av utsagnslogiske **formler**.
- Denne mengden kaller vi **Prop**, for *propositional*.
- Husk: vi er fortsatt kun opptatt av **syntaksen**. Snart skal vi se hvordan disse formlene kan *tolkes*.
- Den enkleste utsagnslogiske formelen er utsagnsvariabelen.
- Det er vanlig å kalle en utsagnsvariabel for en *atomær* formel, så vi fanger opp det i en definisjon.

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en **atomær formel** (eng: *atomic formula*).

Utsagnslogiske formler

- Vi definerte nå *helt presist* en mengde **Prop**.
- Når vi snakker om utsagnslogiske formler, så mener vi altså denne mengden.
- Denne mengden er en mengde av *syntaktiske* objekter. (Foreløpig har vi ikke definert **semantikken** til utsagnslogiske formler.)
- Boka kaller en utsagnslogisk formel for en **well-formed formula** (wff), en velformet formel.
- Hvis det går klart frem hva vi mener, så sier vi bare **formler**.

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av **utsagnslogiske formler** (eng: *propositional formula/well-formed formula*) er den **minste** mengden **Prop** slik at:

1. **Prop** inneholder alle atomære formler.
 2. Hvis $F \in \mathbf{Prop}$, så er $\neg F \in \mathbf{Prop}$.
 3. Hvis $F, G \in \mathbf{Prop}$, så er $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$ og $(F \rightarrow G)$ med i **Prop**.
- Det er den *minste* mengden som oppfyller 1-3 vi er ute etter.
 - Forsøk å se for dere dette som en løk. Det innerste skallet består av atomære formler. Det neste skallet av formler med ett konnektiv, og så videre.

Utsagnslogiske formler

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P, Q, R, S, T
- $\neg P, (Q \wedge R), (S \rightarrow T)$
- $(\neg P \vee (Q \wedge R)), \neg(S \rightarrow T)$
- $\neg(\neg P \vee (Q \wedge R)), \neg\neg(S \rightarrow T)$

Notasjon

Vi dropper ofte unødvendige parenteser:

$(P \rightarrow Q)$ skrives $P \rightarrow Q$
 $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$ skrives $(P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R)$

Utsagnslogiske formler

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $\rightarrow \rightarrow$
- $((Q \wedge P)$

Semantikk

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som **sanne** eller **usanne**.
- Semantikken skal fortelle oss hva formler **betyr**.
- Matematisk sett er dette en helt presis disiplin; alt blir definert fra bunnen av.
- Vi skal holde et skarpt skille mellom **syntaks** (formler, symboler, tegn) og **semantikk** (meningen til symbolene, sannhetsverdiene, modellene), for å unngå forvirring.

Sannhetsverdier

Definisjon (Sannhetsverdi)

La **Bool** = $\{0, 1\}$. Dette er mengden av **sannhetsverdier** (eng: *truth values*).

- Det finnes mange andre bokstaver eller symboler man kan anvende for å betegne sannhetsverdiene.
 - true og false (som i læreboken)
 - T og F
 - \top og \perp
 - True og False
 - sann og usann (ordet “gal” anbefales ikke)
 - S og U
- Jeg anbefaler å bruke **0** og **1** i dette kurset.

Negasjon (ikke)

- Hvis F er et utsagn, så er **negasjonen** (eng: *negation*) til F utsagnet *ikke F*.
- Dette gjenspeiles i syntaksen slik:
 - Hvis $F \in \mathbf{Prop}$, så er $\neg F \in \mathbf{Prop}$.
- Sannhetsverdien til $\neg F$ avhenger av sannhetsverdien til F på følgende måte.

F	$\neg F$
1	0
0	1

Konjunksjon (og)

- Hvis F og G er utsagn, så er **konjunksjonen** (eng: *conjunction*) av F og G utsagnet *F og G*.
- Dette gjenspeiles i syntaksen slik:
 - Hvis $F, G \in \mathbf{Prop}$, så er $(F \wedge G) \in \mathbf{Prop}$.
 - F og G kalles ofte **konjunktene** (eng: *conjunct*).
- Sannhetsverdien til $(F \wedge G)$ avhenger av sannhetsverdiene til F og G på følgende måte.

F	G	$(F \wedge G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjunksjon (eller)

- Hvis F og G er utsagn, så er **disjunksjonen** (eng: *disjunction*) av F og G utsagnet *F eller G*.
- Dette gjenspeiles i syntaksen slik:
 - Hvis $F, G \in \mathbf{Prop}$, så er $(F \vee G) \in \mathbf{Prop}$.
 - F og G kalles ofte **disjunktene** (eng: *disjunct*).
- Sannhetsverdien til $(F \vee G)$ avhenger av sannhetsverdiene til F og G på følgende måte.

F	G	$(F \vee G)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikasjon (hvis, så)

- Hvis F og G er utsagn, så er **implikasjonen** (eng: *implication*) mellom F og G utsagnet *hvis F, så G*.
- Dette gjenspeiles i syntaksen slik:
 - Hvis $F, G \in \mathbf{Prop}$, så er $(F \rightarrow G) \in \mathbf{Prop}$.
- Sannhetsverdien til $(F \rightarrow G)$ avhenger av sannhetsverdiene til F og G på følgende måte.

F	G	$(F \rightarrow G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1