# INF1800 – Forelesning 5

## Utsagnslogikk

Roger Antonsen - 2. september 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-04 17:26)

## Praktisk informasjon

### Endringer i undervisningen

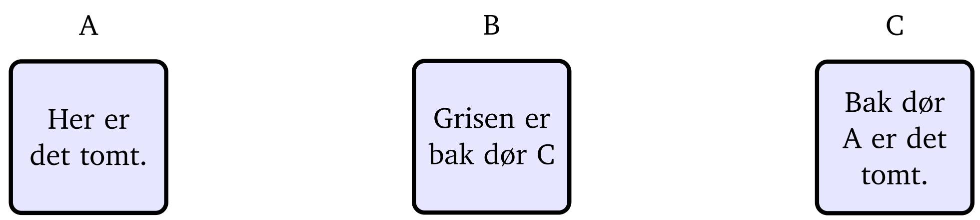
- Lars overtar neste uke med *beregnbarhet*.
- Det blir minst fire uker med beregnbarhet før jeg kommer tilbake og fortsetter med logikkdelen.
- Fra og med neste uke utgår onsdagsforelesningene (09:15–10:00) og tirsdagsforelesningene blir én time lenger. *Forelesningene vil gå som normalt hvis ikke annet er spesifisert!*
- Det vil si at tirsdagsforelesingene vil gå fra 14:15 til 17:00.

### Spørreskjemaet

- Fyll ut!
- For at det skal bli et bra kurs trenger vi tilbakemeldinger fra dere.
- Hvis mange nok har svart i løpet av i morgen (onsdag), kommer jeg med et lite sammendrag.
- Foreløpig (13:30) har 12 av 75 svart. Siden skjemet har vært ute kun siden 08:00 i morges, syns jeg det er helt ok.

## Oppvarming

### Hvordan tjene en million på logikk




- Følgende informasjon er gitt.
  - Bak èn av dørene ligger det en million kroner. Det som står på denne døren er *sant*.
  - Bak en annen dør er det en gris. Det som står på denne døren er *usant*.
  - Bak én dør er det tomt.
- Hvor ligger millionen?
  - Bak dør A? `Nei` Bak dør B? `Nei` Bak dør C? `Ja`

### Repetisjon

- Utsagn: noe som enten er sant eller usant.
- Utsagnsvariable: symboler $\{P, Q, R, \ldots\}$ som vi bruker til å representere utsagn.
- Logiske bindeord: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis-så*, ....
- Konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\neg$ og $\rightarrow$.
- Utsagnslogiske formler: mengden **Prop** som er bygget opp av utsagnsvariable og konnektiver.
- Sannhetsverdier: $\mathbf{Bool} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$.
- Hvordan sannhetsverdiene til en formel avhenger av sannhetsverdiene til utsagnsvariablene.
- Synaks: **Prop**, $\{P, Q, R, \ldots\}$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, parenteser, ...
- Semantikk: **Bool**, sannhetsverdier, mening, utsagn, ...

## Eksempler & Sannhetsverditabeller

### Eksempel 1

| | |
|---|---|
| Hvis solen skinner, så er jeg glad. | $(S \rightarrow G)$ |
| Solen skinner. | $S$ |
| Jeg er glad. | $G$ |

- Dette er et eksempel på et *gyldig* eller *holdbart* (eng: *valid*) argument.
- Hvis $(S \rightarrow G)$ er sann og $S$ er sann, så må også $G$ være sann.
- Vi sier at $G$ er en *logisk konsekvens* (eng: *logical consequence*) av $(S \rightarrow G)$ og $S$.
- Vi skal si dette på en mer presis måte ved å la $v$ være en funksjon fra utsagnslogiske formler til $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.
  - Hvis $v(S \rightarrow G) = \mathbf{1}$ og $v(S) = \mathbf{1}$, så $v(G) = \mathbf{1}$.

### Eksempel 2

| | |
|---|---|
| Hvis solen skinner, så er jeg glad. | $(S \rightarrow G)$ |
| Jeg er ikke glad. | $\neg G$ |
| Solen skinner ikke. | $\neg S$ |

- Dette er også et eksempel på et *gyldig* argument.
- En sannhetsverditabell kan brukes til å analysere argumentet.

| $S$ | $G$ | $(S \rightarrow G)$ | $\neg G$ | $\neg S$ |
|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| **1** | **0** | **0** | **1** | **0** |
| **0** | **1** | **1** | **0** | **1** |
| **0** | **0** | **1** | **1** | **1** |

- Det er den nederste raden som er relevant, for det er kun her både $(S \rightarrow G)$ og $\neg G$ sanne. Vi ser at også $\neg S$ er sann da.

### Eksempel 3

| | |
|---|---|
| Hvis solen skinner, så er jeg glad. | $(S \to G)$ |
| Solen skinner ikke. | $\neg S$ |
| Jeg er ikke glad. | $\neg G$ |

- Dette er *ikke* et gyldig argument.
- Det er fordi $(S \to G)$ og $\neg S$ kan begge være sanne uten at $\neg G$ er det. (Jeg kan være glad selv om solen ikke skinner.)
- Med andre ord, $\neg G$ er *ikke* en logisk konsekvens av $(S \to G)$ og $\neg S$.
- Vi kan også se dette via (en rad i) en sannhetsverditabell.

| $S$ | $G$ | $(S \to G)$ | $\neg S$ | $\neg G$ |
|---|---|---|---|---|
| **0** | **1** | **1** | **1** | **0** |

### Sannhetsverditabeller

- En *sannhetsverditabell* (eng: *truth table*) forteller hva sannhetsverdien til en sammensatt utsagnslogisk formel er på bakgrunn av hvilke sannhetsverdier som er tilordnet utsagnsvariablene.
- Sagt på en annen måte: Hvis en tilordning av sannhetsverdier til utsagnsvariablene er gitt, så kan vi bruke en sannhetsverditabell til å regne ut sannhetsverdiene til de sammensatte utsagnene.
- Vi så forrige gang sannhetsverditabellene for konnektivene.
- Disse tabellene definerer meningen til de fire konnektivene.
- Vi ser på tabellene en gang til.

| $F$ | $\neg F$ |
|---|---|
| **1** | **0** |
| **0** | **1** |

| $F$ | $G$ | $(F \land G)$ |
|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **0** | **0** |
| **0** | **1** | **0** |
| **0** | **0** | **0** |

| $F$ | $G$ | $(F \lor G)$ |
|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **0** | **1** |
| **0** | **1** | **1** |
| **0** | **0** | **0** |

| $F$ | $G$ | $(F \to G)$ |
|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** |
| **1** | **0** | **0** |
| **0** | **1** | **1** |
| **0** | **0** | **1** |

# Semantikk for utsagnslogikk

## Valuasjoner

**Definisjon (Valuasjon).**
En *valuasjon* (eng: *valuation*) er en funksjon $v$ fra **Prop** til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{0}$
- $v(A \land B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{1}$ *og* $v(B) = \mathbf{1}$
- $v(A \lor B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{1}$ *eller* $v(B) = \mathbf{1}$
- $v(A \to B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{1}$ *impliserer* $v(B) = \mathbf{1}$.

- Meningen til *og*, *eller* og *impliserer* betraktes som definert av sannhetsverditabellene for konnektivene.
- Det siste punktet kunne ha vært slik:
  - $v(A \to B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{0}$ *eller* $v(B) = \mathbf{1}$.
- En valuasjon er en presisering av "en tilordning av sannhetsverdier".
- En valuasjon svarer til *en rad* i en sannhetsverditabell.
- En sannhetsverditabell kan altså si noe om *alle* valuasjoner.
- Når vi gir en valuasjon, så behøver vi kun gi verdier for utsagnsvariablene.
- Verdiene for utsagnslogiske formler er dermed også gitt (ved definisjonen av en valuasjon).
- Vi sier at vi har en *tilordning av sannhetsverdier* (eng: *assignment of truth values*) til utsagnsvariable.
- Vi skal se på noen eksempler for å få en bedre forståelse av hva en valuasjon er.

**Eksempel.**

- Se på formelen $(P \land \neg Q)$.
- La $v$ være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Hva er $v(P \land \neg Q)$?
- Definisjonen sier
  - $v(P \land \neg Q) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg Q) = \mathbf{1}$.
- Vi vet at $v(P) = \mathbf{1}$, så det holder å sjekke om $v(\neg Q) = \mathbf{1}$.
- Definisjonen sier
  - $v(\neg Q) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Siden $v(Q) = \mathbf{0}$, så er det greit.
- Vi konkluderer med at $v(P \land \neg Q) = \mathbf{1}$.

**Eksempel.**

- En alternativ måte å finne frem til dette på er ved å se på kun én rad i sannhetsverditabellen.
- Valuasjonen $v$ som er slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$ kan representeres ved å sette $\mathbf{1}$ under $P$ og $\mathbf{0}$ under $Q$.
- Deretter kan vi bruke sannhetsverditabellene som definerer meningen til konnektivene for å finne sannhetsverdien til hele uttrykket.
- Vi må arbeide oss "innenfra og utover".

| $P$ | $\land$ | $\neg$ | $Q$ |
|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **1** | **0** |

**Eksempel.**

- Se på formelen $(\neg P \to Q)$.
- La $v$ være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Hva er $v(\neg P \to Q)$?
- Definisjonen sier
  - $v(\neg P \to Q) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(\neg P)$ impliserer $v(Q)$.
- $v(\neg P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Siden **0** impliserer **0**, konkluderer vi med at $v(\neg P \to Q) = \mathbf{1}$.
- En rad i en sannhetsverditabell ville ha gitt oss følgende:

| $\neg$ | $P$ | $\to$ | $Q$ |
|---|---|---|---|
| **0** | **1** | **1** | **0** |

## Oppfyllbarhet

**Definisjon (Oppfyllbarhet).**

- En valuasjon $v$ *oppfyller* (eng: *satisfies*) en utsagnslogisk formel $A$ hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Dette skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er *oppfyllbar* (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

**Eksempel.**

- Formelen $(P \to Q)$ er oppfyllbar; den oppfylles av enhver valuasjon $v$ slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.
- Formelen $(P \land \neg P)$ er *ikke* oppfyllbar; det fins ingen valusjon $v$ slik at både $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg P) = \mathbf{1}$.

### Falsifiserbarhet

**Definisjon (Falsifiserbarhet).**

- En valuasjon $v$ *falsifiserer* (eng: *falsifies*) en utsagnslogisk formel $A$ hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Dette skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er *falsifiserbar* (eng: *falsifiable*) hvis det fins en valuasjon som falsifiserer den.

**Eksempel.**

- Formelen $(P \to Q)$ er falsifiserbar; den falsifiseres av enhver valuasjon $v$ slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Formelen $(P \lor \neg P)$ er *ikke* falsifiserbar; det fins ingen valusjon $v$ slik at både $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(\neg P) = \mathbf{0}$.

### Tautologi / Gyldighet

**Definisjon (Tautologi / Gyldighet).**
En utsagnslogisk formel $A$ er en *tautologi* (eng: *tautology*) eller er *gyldig* (eng: *valid*) hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for *alle* valuasjoner $v$. Dette skrives ofte $\models A$.

**Eksempel.**

- Formelen $(P \lor \neg P)$ er en tautologi; for enhver valuasjon $v$ så vil enten $v(P) = \mathbf{1}$ eller $v(\neg P) = \mathbf{1}$.
- Formelen $P$ er *ikke* en tautologi; det fins nemlig en valusjon $v$ slik at $v(P) = \mathbf{0}$.

### Motsigelse / Kontradiksjon

**Definisjon (Motsigelse / Kontradiksjon).**
En utsagnslogisk formel $A$ er *kontradiktorisk* (eng: *contradictory*), eller en *kontradiksjon* (eng: *contradiction*), eller en *motsigelse*, hvis $v(A) = \mathbf{0}$ for *alle* valuasjoner $v$.

**Eksempel.**
- Formelen $(P \land \neg P)$ er kontradiktorisk; det fins ingen valuasjon $v$ som er slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg P) = \mathbf{1}$.
- Formelen $P$ er *ikke* kontradiktorisk; det fins nemlig en valusjon $v$ slik at $v(P) = \mathbf{1}$.

## Oppsummering av disse begrepene

En formel er . . .
- oppfyllbar hvis det er *mulig* å gjøre den sann.

  (Det fins en valuasjon $v$ slik at $v(A) = \mathbf{1}$.)
- falsifiserbar hvis det er *mulig* å gjøre den usann.
- gyldig hvis den *alltid* er sann.

  (For enhver valuasjon $v$, så er det slik at $v(A) = \mathbf{1}$.)
- kontradiktorisk hvis den *alltid* er usann.

**Merk.**
- Det motsatte av en tautologi er en falsifiserbar formel.
- Det motsatte av en motsigelse er en oppfyllbar formel.
- En tautologi er *ikke* det motsatte av en motsigelse!

## Eksempler

**Eksempel.**
- Er $\neg P$ en kontradiksjon?

  `Nei`, fordi det fins en valuasjon $v$ slik at $v(\neg P) = \mathbf{1}$.
- Er $\neg(P \to P)$ en kontradiksjon?

  `Ja`, fordi $v(\neg(P \to P)) = \mathbf{0}$ for enhver valuasjon $v$.

- Det er lett å se dette ved hjelp av en sannhetsverditabell:

| $P$ | $\neg$ | $(P \to P)$ |
|---|---|---|
| **1** | **0** | **1** |
| **0** | **0** | **1** |

- Er $(P \to P)$ en kontradiksjon?

  `Nei`, fordi det fins en valuasjon $v$ slik at $v(P \to P) = \mathbf{1}$.

**Eksempel.**

- Er $((P \lor Q) \to P)$ en tautologi?

  `Nei`, fordi det fins en valuasjon $v$ slik at $v((P \lor Q) \to P) = \mathbf{0}$.

  - Vi kan bruke en sannhetsverditabell for å se dette:

| $P$ | $Q$ | $((P$ | $\lor$ | $Q)$ | $\to$ | $P)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **0** | 1 | **1** | 0 | **1** | 1 |
| **1** | **1** | 1 | **1** | 1 | **1** | 1 |
| **0** | **1** | 0 | **1** | 1 | **0** | 0 |
| **0** | **0** | 0 | **0** | 0 | **1** | 0 |

  - Den aktuelle valuasjonen kan leses ut av rad tre.
  - Den er slik at $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$.

**Eksempel.**

- Er $(P \to (P \lor Q))$ en tautologi?

  `Ja`, fordi enhver valuasjon $v$ er slik at $v(P \to (P \lor Q)) = \mathbf{1}$.
  Grunnen til dét er at hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så vil også $v(P \lor Q) = \mathbf{1}$.

- Er $(P \to P)$ en tautologi?

  `Ja`, fordi enhver valuasjon $v$ er slik at $v(P \to P) = \mathbf{1}$.

## Noen viktige begreper

- Syntaks — et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk — en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- Kalkyle (eng: *calculus*) — syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne bevisbare uttrykk.

- Sunnhet (eng: *soundness*) — alle bevisbare uttrykk er tautologier (korrekthet av kalkylen).
- Kompletthet (eng: *completeness*) — alle tautologier er bevisbare (kalkylen sterk nok til å fange inn *alle* interessante uttrykk).

## Bruk av utsagnslogikk

### Hvordan fange inn utsagn?

| | |
|---|---|
| Griser liker polka. | $P$ |
| Griser liker disco. | $Q$ |
| Griser liker ikke disco. | $\neg Q$ |
| Griser liker disco og polka. | $(P \land Q)$ |
| Hvis griser liker polka, så liker de disco. | $(P \to Q)$ |
| Griser liker hverken polka eller disco. | $(\neg P \land \neg Q)$ eller $\neg(P \lor Q)$ |
| Griser liker enten polka eller disco. | $(P \lor Q)$ |
| Griser liker polka eller liker ikke polka. | $(P \lor \neg P)$ |
| Griser liker polka hvis de liker disco. | $(Q \to P)$ |
| Griser liker polka bare hvis de liker disco. | $(P \to Q)$ |

- Hvis jeg vinner i lotto eller står på eksamen, så blir jeg glad.
  - $L$ = jeg vinner i lotto
  - $E$ = jeg står på eksamen
  - $G$ = jeg blir glad
  - Vi kan representere utsagnet ved formelen $((L \lor E) \to G)$.
- Jeg blir glad hvis og bare hvis jeg vinner i lotto.
  - Vi kan dele denne påstanden inn i to:
  - Jeg blir glad hvis jeg vinner i lotto: $(L \to G)$
  - Jeg blir glad bare hvis jeg vinner i lotto: $(G \to L)$
  - Vi får dermed utsagnet: $(G \to L) \land (L \to G)$
  - Vi kan godt bruke konnektivet $\leftrightarrow$ og skrive: $(G \leftrightarrow L)$.
  - Da leser vi $(G \leftrightarrow L)$ som en forkortelse for $(G \to L) \land (L \to G)$.