INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 5: UTSAGNSLOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

2. september 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-04 17:26)

Praktisk informasjon

Endringer i undervisningen

- Lars overtar neste uke med *beregnbarhet*.
- Det blir minst fire uker med beregnbarhet før jeg kommer tilbake og fortsetter med logikkdelen.
- Fra og med neste uke utgår onsdagsforelesningene (09:15–10:00) og tirsdagsforelesningene blir én time lenger. Forelesningene vil gå som normalt hvis ikke annet er spesifisert!
- Det vil si at tirsdagsforelesingene vil gå fra 14:15 til 17:00.

Spørreskjemaet

- Fyll ut!
- For at det skal bli et bra kurs trenger vi tilbakemeldinger fra dere.
- Hvis mange nok har svart i løpet av i morgen (onsdag), kommer jeg med et lite sammendrag.
- Foreløpig (13:30) har 12 av 75 svart. Siden skjemet har vært ute kun siden 08:00 i morges, syns jeg det er helt ok.

Oppvarming

Hvordan tjene en million på logikk

A	B	C
Her er det tomt.	Grisen er bak dør C	Bak dør A er det tomt.

- Følgende informasjon er gitt.
  - Bak èn av dørene ligger det en million kroner. Det som står på denne døren er *sant*.
  - Bak en annen dør er det en gris. Det som står på denne døren er *usant*.
  - Bak én dør er det tomt.
- Hvor ligger millionen?
  - Bak dør A? `Nei` Bak dør B? `Nei` Bak dør C? `Ja`

Repetisjon

- Utsagn: noe som enten er sant eller usant.
- Utsagnsvariable: symboler $\{P, Q, R, \ldots\}$ som vi bruker til å representere utsagn.
- Logiske bindeord: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis-så*, ...
- Konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\neg$ og $\rightarrow$.
- Utsagnslogiske formler: mengden **Prop** som er bygget opp av utsagnsvariable og konnektiver.
- Sannhetsverdier: $\mathbf{Bool} = \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$.
- Hvordan sannhetsverdiene til en formel avhenger av sannhetsverdiene til utsagnsvariablene.
- Synaks: **Prop**, $\{P, Q, R, \ldots\}$, $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, parenteser, ...
- Semantikk: **Bool**, sannhetsverdier, mening, utsagn, ...

Eksempler & Sannhetsverditabeller

Eksempel 1

Hvis solen skinner, så er jeg glad.	$(S \rightarrow G)$
Solen skinner.	S
Jeg er glad.	G

- Dette er et eksempel på et *gyldig* eller *holdbart* (eng: *valid*) argument.
- Hvis $(S \rightarrow G)$ er sann og S er sann, så må også G være sann.
- Vi sier at G er en logisk konsekvens (eng: *logical consequence*) av $(S \rightarrow G)$ og S.
- Vi skal si dette på en mer presis måte ved å la v være en funksjon fra utsagnslogiske formler til $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$.
  - Hvis $v(S \rightarrow G) = \mathbf{1}$ og $v(S) = \mathbf{1}$, så $v(G) = \mathbf{1}$.

Eksempel 2

Hvis solen skinner, så er jeg glad.	$(S \rightarrow G)$
Jeg er ikke glad.	$\neg G$
Solen skinner ikke.	$\neg S$

- Dette er også et eksempel på et *gyldig* argument.
- En sannhetsverditabell kan brukes til å analysere argumentet.

S	G	$(S \rightarrow G)$	$\neg G$	$\neg S$
1	**1**	**1**	**0**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**1**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**1**	**1**

- Det er den nederste raden som er relevant, for det er kun her både $(S \rightarrow G)$ og $\neg G$ sanne. Vi ser at også $\neg S$ er sann da.

Eksempel 3

Hvis solen skinner, så er jeg glad.	$(S \rightarrow G)$
Solen skinner ikke.	$\neg S$
Jeg er ikke glad.	$\neg G$

- Dette er *ikke* et gyldig argument.
- Det er fordi $(S \rightarrow G)$ og $\neg S$ kan begge være sanne uten at $\neg G$ er det. (Jeg kan være glad selv om solen ikke skinner.)
- Med andre ord, $\neg G$ er *ikke* en logisk konsekvens av $(S \rightarrow G)$ og $\neg S$.
- Vi kan også se dette via (en rad i) en sannhetsverditabell.

S	G	$(S \rightarrow G)$	$\neg S$	$\neg G$
0	**1**	**1**	**1**	**0**

Sannhetsverditabeller

- En sannhetsverditabell (eng: *truth table*) forteller hva sannhetsverdien til en sammensatt utsagnslogisk formel er på bakgrunn av hvilke sannhetsverdier som er tilordnet utsagnsvariablene.
- Sagt på en annen måte: Hvis en tilordning av sannhetsverdier til utsagnsvariablene er gitt, så kan vi bruke en sannhetsverditabell til å regne ut sannhetsverdiene til de sammensatte utsagnene.
- Vi så forrige gang sannhetsverditabellene for konnektivene.
- Disse tabellene definerer meningen til de fire konnektivene.
- Vi ser på tabellene en gang til.

Sannhetsverditabeller

F	$\neg F$
1	**0**
0	**1**

F	G	$(F \land G)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**0**
0	**0**	**0**

F	G	$(F \lor G)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**1**
0	**1**	**1**
0	**0**	**0**

F	G	$(F \rightarrow G)$
1	**1**	**1**
1	**0**	**0**
0	**1**	**1**
0	**0**	**1**

Semantikk for utsagnslogikk

Valuasjoner

Definisjon (Valuasjon)

En valuasjon (eng: *valuation*) er en funksjon v fra **Prop** til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{0}$
- $v(A \land B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{1}$ *og* $v(B) = \mathbf{1}$
- $v(A \lor B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{1}$ *eller* $v(B) = \mathbf{1}$
- $v(A \rightarrow B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{1}$ *impliserer* $v(B) = \mathbf{1}$.

- Meningen til *og*, *eller* og *impliserer* betraktes som definert av sannhetsverditabellene for konnektivene.
- Det siste punktet kunne ha vært slik:
  - $v(A \rightarrow B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{0}$ *eller* $v(B) = \mathbf{1}$.
- En valuasjon er en presisering av “en tilordning av sannhetsverdier”.

Valuasjoner

- En valuasjon svarer til *en rad* i en sannhetsverditabell.
- En sannhetsverditabell kan altså si noe om *alle* valuasjoner.
- Når vi gir en valuasjon, så behøver vi kun gi verdier for utsagnsvariablene.
- Verdiene for utsagnslogiske formler er dermed også gitt (ved definisjonen av en valuasjon).
- Vi sier at vi har en *tilordning av sannhetsverdier* (eng: *assignment of truth values*) til utsagnsvariable.
- Vi skal se på noen eksempler for å få en bedre forståelse av hva en valuasjon er.

Valuasjoner

Eksempel

- Se på formelen $(P \wedge \neg Q)$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Hva er $v(P \wedge \neg Q)$?
- Definisjonen sier
  - $v(P \wedge \neg Q) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg Q) = \mathbf{1}$.
- Vi vet at $v(P) = \mathbf{1}$, så det holder å sjekke om $v(\neg Q) = \mathbf{1}$.
- Definisjonen sier
  - $v(\neg Q) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Siden $v(Q) = \mathbf{0}$, så er det greit.
- Vi konkluderer med at $v(P \wedge \neg Q) = \mathbf{1}$.

Valuasjoner

Eksempel

- En alternativ måte å finne frem til dette på er ved å se på kun én rad i sannhetsverditabellen.
- Valuasjonen v som er slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$ kan representeres ved å sette $\mathbf{1}$ under P og $\mathbf{0}$ under Q.
- Deretter kan vi bruke sannhetsverditabellene som definerer meningen til konnektivene for å finne sannhetsverdien til hele uttrykket.
- Vi må arbeide oss "innenfra og utover".

P	$\wedge$	$\neg$	Q
1	**1**	**1**	**0**

Valuasjoner

Eksempel

- Se på formelen $(\neg P \rightarrow Q)$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Hva er $v(\neg P \rightarrow Q)$?
- Definisjonen sier
  - $v(\neg P \rightarrow Q) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(\neg P)$ impliserer $v(Q)$.
- $v(\neg P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Siden $\mathbf{0}$ impliserer $\mathbf{0}$, konkluderer vi med at $v(\neg P \rightarrow Q) = \mathbf{1}$.
- En rad i en sannhetsverditabell ville ha gitt oss følgende:

$\neg$	P	$\rightarrow$	Q
0	**1**	**1**	**0**

Oppfyllbarhet

Definisjon (Oppfyllbarhet)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Dette skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er oppfyllbar (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Formelen $(P \rightarrow Q)$ er oppfyllbar; den oppfylles av enhver valuasjon v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.
- Formelen $(P \wedge \neg P)$ er *ikke* oppfyllbar; det fins ingen valusjon v slik at både $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg P) = \mathbf{1}$.

Falsifiserbarhet

Definisjon (Falsifiserbarhet)

- En valuasjon v falsifiserer (eng: *falsifies*) en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Dette skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er falsifiserbar (eng: *falsifiable*) hvis det fins en valuasjon som falsifiserer den.

Eksempel

- Formelen $(P \to Q)$ er falsifiserbar; den falsifiseres av enhver valuasjon v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Formelen $(P \lor \neg P)$ er *ikke* falsifiserbar; det fins ingen valusjon v slik at både $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(\neg P) = \mathbf{0}$.

Tautologi / Gyldighet

Definisjon (Tautologi / Gyldighet)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi (eng: *tautology*) eller er gyldig (eng: *valid*) hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for *alle* valuasjoner v. Dette skrives ofte $\models A$.

Eksempel

- Formelen $(P \lor \neg P)$ er en tautologi; for enhver valuasjon v så vil enten $v(P) = \mathbf{1}$ eller $v(\neg P) = \mathbf{1}$.
- Formelen P er *ikke* en tautologi; det fins nemlig en valusjon v slik at $v(P) = \mathbf{0}$.

Motsigelse / Kontradiksjon

Definisjon (Motsigelse / Kontradiksjon)

En utsagnslogisk formel A er kontradiktorisk (eng: *contradictory*), eller en kontradiksjon (eng: *contradiction*), eller en motsigelse, hvis $v(A) = \mathbf{0}$ for *alle* valuasjoner v.

Eksempel

- Formelen $(P \land \neg P)$ er kontradiktorisk; det fins ingen valuasjon v som er slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg P) = \mathbf{1}$.
- Formelen P er *ikke* kontradiktorisk; det fins nemlig en valusjon v slik at $v(P) = \mathbf{1}$.

Oppsummering av disse begrepene

En formel er ...

- oppfyllbar hvis det er *mulig* å gjøre den sann.
  (Det fins en valuasjon v slik at $v(A) = \mathbf{1}$.)
- falsifiserbar hvis det er *mulig* å gjøre den usann.
- gyldig hvis den *alltid* er sann.
  (For enhver valuasjon v, så er det slik at $v(A) = \mathbf{1}$.)
- kontradiktorisk hvis den *alltid* er usann.

Merk

- Det motsatte av en tautologi er en falsifiserbar formel.
- Det motsatte av en motsigelse er en oppfyllbar formel.
- En tautologi er *ikke* det motsatte av en motsigelse!

Eksempler

Eksempel

- Er $\neg P$ en kontradiksjon?

  Nei, fordi det fins en valuasjon v slik at $v(\neg P) = \mathbf{1}$.
- Er $\neg(P \to P)$ en kontradiksjon?

  Ja, fordi $v(\neg(P \to P)) = \mathbf{0}$ for enhver valuasjon v.
  - Det er lett å se dette ved hjelp av en sannhetsverditabell:

P	$\neg$	$(P \to P)$
1	**0**	**1**
0	**0**	**1**

- Er $(P \to P)$ en kontradiksjon?

  Nei, fordi det fins en valuasjon v slik at $v(P \to P) = \mathbf{1}$.

Eksempler

Eksempel

- Er $((P \lor Q) \to P)$ en tautologi?

  Nei, fordi det fins en valuasjon v slik at $v((P \lor Q) \to P) = \mathbf{0}$.
  - Vi kan bruke en sannhetsverditabell for å se dette:

P	Q	((P	$\lor$	Q)	$\to$	P)
1	**0**	1	**1**	0	**1**	1
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	0
0	**0**	0	**0**	0	**1**	0

  - Den aktuelle valuasjonen kan leses ut av rad tre.
  - Den er slik at $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$.

Eksempler

Eksempel

- Er $(P \to (P \lor Q))$ en tautologi?

  Ja, fordi enhver valuasjon v er slik at $v(P \to (P \lor Q)) = \mathbf{1}$.
  Grunnen til dét er at hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så vil også $v(P \lor Q) = \mathbf{1}$.
- Er $(P \to P)$ en tautologi?

  Ja, fordi enhver valuasjon v er slik at $v(P \to P) = \mathbf{1}$.

Noen viktige begreper

- Syntaks — et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk — en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- Kalkyle (eng: *calculus*) — syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne bevisbare uttrykk.
- Sunnhet (eng: *soundness*) — alle bevisbare uttrykk er tautologier (korrekthet av kalkylen).
- Kompletthet (eng: *completeness*) — alle tautologier er bevisbare (kalkylen sterk nok til å fange inn *alle* interessante uttrykk).

Bruk av utsagnslogikk

Hvordan fange inn utsagn?

Griser liker polka.	P
Griser liker disco.	Q
Griser liker ikke disco.	$\neg Q$
Griser liker disco og polka.	$(P \land Q)$
Hvis griser liker polka, så liker de disco.	$(P \to Q)$
Griser liker hverken polka eller disco.	$(\neg P \land \neg Q)$ eller $\neg(P \lor Q)$
Griser liker enten polka eller disco.	$(P \lor Q)$
Griser liker polka eller liker ikke polka.	$(P \lor \neg P)$
Griser liker polka hvis de liker disco.	$(Q \to P)$
Griser liker polka bare hvis de liker disco.	$(P \to Q)$

Hvordan fange inn utsagn?

- Hvis jeg vinner i lotto eller står på eksamen, så blir jeg glad.
  - L = jeg vinner i lotto
  - E = jeg står på eksamen
  - G = jeg blir glad
  - Vi kan representere utsagnet ved formelen $((L \lor E) \to G)$.
- Jeg blir glad hvis og bare hvis jeg vinner i lotto.
  - Vi kan dele denne påstanden inn i to:
  - Jeg blir glad hvis jeg vinner i lotto: $(L \to G)$
  - Jeg blir glad bare hvis jeg vinner i lotto: $(G \to L)$
  - Vi får dermed utsagnet: $(G \to L) \land (L \to G)$
  - Vi kan godt bruke konnektivet $\leftrightarrow$ og skrive: $(G \leftrightarrow L)$.
  - Da leser vi $(G \leftrightarrow L)$ som en forkortelse for $(G \to L) \land (L \to G)$.