

INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

FORELESNING 5: UTSAGNSLOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

2. september 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-04 17:26)

Praktisk informasjon

Endringer i undervisningen

- Lars overtar neste uke med *beregnbarhet*.
- Det blir minst fire uker med beregnbarhet før jeg kommer tilbake og fortsetter med logikkdelen.
- Fra og med neste uke utgår onsdagsforelesningene (09:15–10:00) og tirsdagsforelesningene blir én time lenger. Forelesningene vil gå som normalt hvis ikke annet er spesifisert!
- Det vil si at tirsdagsforelesningene vil gå fra 14:15 til 17:00.

Spørreskjemaet

- Fyll ut!
- For at det skal bli et bra kurs trenger vi tilbakemeldinger fra dere.
- Hvis mange nok har svart i løpet av i morgen (onsdag), kommer jeg med et lite sammendrag.
- Foreløpig (13:30) har 12 av 75 svart. Siden skjemet har vært ute kun siden 08:00 i morges, syns jeg det er helt ok.

Oppvarming

Hvordan tjene en million på logikk

A

Her er
det tomt.

B

Grisen
er bak
dør C

C

Bak dør
A er det
tomt.

- Følgende informasjon er gitt.
 - Bak én av dørene ligger det en million kroner.
Det som står på denne døren er *sant*.
 - Bak en annen dør er det en gris.
Det som står på denne døren er *usant*.
 - Bak én dør er det tomt.
- Hvor ligger millionen?
 - Bak dør A? **Nei** Bak dør B? **Nei** Bak dør C? **Ja**

Repetisjon

- Utsagn: noe som enten er sant eller usant.
- Utsagnsvariable: symboler $\{P, Q, R, \dots\}$ som vi bruker til å representere utsagn.
- Logiske bindeord: *og, eller, ikke, hvis-så, \dots*
- Konnektiver: \wedge, \vee, \neg og \rightarrow .
- Utsagnslogiske formler: mengden **Prop** som er bygget opp av utsagnsvariable og konnektiver.
- Sannhetsverdier: **Bool** = $\{1, 0\}$.
- Hvordan sannhetsverdiene til en formel avhenger av sannhetsverdiene til utsagnsvariablene.
- Synaks: **Prop**, $\{P, Q, R, \dots\}$, $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$, parenteser, \dots
- Semantikk: **Bool**, sannhetsverdier, mening, utsagn, \dots

Eksempler & Sannhetsverditabeller

Eksempel 1

Hvis solen skinner, så er jeg glad.	$(S \rightarrow G)$
Solen skinner.	S
<hr/>	
Jeg er glad.	G

- Dette er et eksempel på et *gyldig* eller *holdbart* (eng: *valid*) argument.
- Hvis $(S \rightarrow G)$ er **sann** og S er **sann**, så må også G være **sann**.
- Vi sier at G er en **logisk konsekvens** (eng: *logical consequence*) av $(S \rightarrow G)$ og S .
- Vi skal si dette på en mer presis måte ved å la v være en funksjon fra utsagnslogiske formler til $\{0, 1\}$.
 - Hvis $v(S \rightarrow G) = 1$ og $v(S) = 1$, så $v(G) = 1$.

Eksempel 2

Hvis solen skinner, så er jeg glad. $(S \rightarrow G)$

Jeg er ikke glad. $\neg G$

Solen skinner ikke. $\neg S$

- Dette er også et eksempel på et *gyldig* argument.
- En sannhetsverditabell kan brukes til å analysere argumentet.

S	G	$(S \rightarrow G)$	$\neg G$	$\neg S$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

- Det er den nederste raden som er relevant, for det er kun her både $(S \rightarrow G)$ og $\neg G$ sanne. Vi ser at også $\neg S$ er sann da.

Eksempel 3

Hvis solen skinner, så er jeg glad. $(S \rightarrow G)$

Solen skinner ikke. $\neg S$

Jeg er ikke glad. $\neg G$

- Dette er *ikke* et gyldig argument.
- Det er fordi $(S \rightarrow G)$ og $\neg S$ kan begge være **sanne** uten at $\neg G$ er det. (Jeg kan være glad selv om solen ikke skinner.)
- Med andre ord, $\neg G$ er *ikke* en **logisk konsekvens** av $(S \rightarrow G)$ og $\neg S$.
- Vi kan også se dette via (en rad i) en sannhetsverditabell.

S	G	$(S \rightarrow G)$	$\neg S$	$\neg G$
0	1	1	1	0

Sannhetsverditabeller

- En **sannhetsverditabell** (eng: *truth table*) forteller hva sannhetsverdien til en sammensatt utsagnslogisk formel er på bakgrunn av hvilke sannhetsverdier som er tilordnet utsagnsvariablene.
- Sagt på en annen måte: Hvis en tilordning av sannhetsverdier til utsagnsvariablene er gitt, så kan vi bruke en sannhetsverditabell til å regne ut sannhetsverdiene til de sammensatte utsagnene.
- Vi så forrige gang sannhetsverditabellene for konnektivene.
- Disse tabellene **definerer** meningen til de fire konnektivene.
- Vi ser på tabellene en gang til.

Sannhetsverditabeller

F	$\neg F$
1	0
0	1

F	G	$(F \wedge G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

F	G	$(F \vee G)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

F	G	$(F \rightarrow G)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Semantikk for utsagnslogikk

Valuasjoner

Definisjon (Valuasjon)

En **valuasjon** (eng: *valuation*) er en funksjon v fra **Prop** til **Bool** slik at:

- $v(\neg A) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{0}$
- $v(A \wedge B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{1}$ *og* $v(B) = \mathbf{1}$
- $v(A \vee B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{1}$ *eller* $v(B) = \mathbf{1}$
- $v(A \rightarrow B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{1}$ *impliserer* $v(B) = \mathbf{1}$.

- Meningen til *og*, *eller* og *impliserer* betraktes som definert av sannhetsverditabellene for konnektivene.
- Det siste punktet kunne ha vært slik:
 - $v(A \rightarrow B) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(A) = \mathbf{0}$ *eller* $v(B) = \mathbf{1}$.
- En valuasjon er en presisering av “en tilordning av sannhetsverdier”.

Valuasjoner

- En valuasjon svarer til *en rad* i en sannhetsverditabell.
- En sannhetsverditabell kan altså si noe om *alle* valuasjoner.
- Når vi gir en valuasjon, så behøver vi kun gi verdier for utsagnsvariablene.
- Verdiene for utsagnslogiske formler er dermed også gitt (ved definisjonen av en valuasjon).
- Vi sier at vi har en *tilordning av sannhetsverdier* (eng: *assignment of truth values*) til utsagnsvariable.
- Vi skal se på noen eksempler for å få en bedre forståelse av hva en valuasjon er.

Valuasjoner

Eksempel

- Se på formelen $(P \wedge \neg Q)$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Hva er $v(P \wedge \neg Q)$?
- Definisjonen sier
 - $v(P \wedge \neg Q) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg Q) = \mathbf{1}$.
- Vi vet at $v(P) = \mathbf{1}$, så det holder å sjekke om $v(\neg Q) = \mathbf{1}$.
- Definisjonen sier
 - $v(\neg Q) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Siden $v(Q) = \mathbf{0}$, så er det greit.
- Vi konkluderer med at $v(P \wedge \neg Q) = \mathbf{1}$.

Valuasjoner

Eksempel

- En alternativ måte å finne frem til dette på er ved å se på kun én rad i sannhetsverditabellen.
- Valuasjonen v som er slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$ kan representeres ved å sette $\mathbf{1}$ under P og $\mathbf{0}$ under Q .
- Deretter kan vi bruke sannhetsverditabellene som definerer meningen til konnektivene for å finne sannhetsverdien til hele uttrykket.
- Vi må arbeide oss “innenfra og utover”.

$$\begin{array}{cccc} P & \wedge & \neg & Q \\ \hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{array}$$

Valuasjoner

Eksempel

- Se på formelen $(\neg P \rightarrow Q)$.
- La v være en valuasjon slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Hva er $v(\neg P \rightarrow Q)$?
- Definisjonen sier
 - $v(\neg P \rightarrow Q) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $v(\neg P)$ **impliserer** $v(Q)$.
- $v(\neg P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Siden $\mathbf{0}$ **impliserer** $\mathbf{0}$, konkluderer vi med at $v(\neg P \rightarrow Q) = \mathbf{1}$.
- En rad i en sannhetsverditabell ville ha gitt oss følgende:

\neg	P	\rightarrow	Q
<hr/>			
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$

Oppfylbarhet

Definisjon (Oppfylbarhet)

- En valuasjon v **oppfyller** (eng: *satisfies*) en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Dette skrives ofte $v \models A$.
- En utsagnslogisk formel er **oppfylbar** (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Formelen $(P \rightarrow Q)$ er oppfylbar; den oppfylles av enhver valuasjon v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.
- Formelen $(P \wedge \neg P)$ er *ikke* oppfylbar; det fins ingen valuasjon v slik at både $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg P) = \mathbf{1}$.

Falsifiserbarhet

Definisjon (Falsifiserbarhet)

- En valuasjon v **falsifiserer** (eng: *falsifies*) en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Dette skrives ofte $v \not\models A$.
- En utsagnslogisk formel er **falsifiserbar** (eng: *falsifiable*) hvis det fins en valuasjon som falsifiserer den.

Eksempel

- Formelen $(P \rightarrow Q)$ er falsifiserbar; den falsifiseres av enhver valuasjon v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.
- Formelen $(P \vee \neg P)$ er *ikke* falsifiserbar; det fins ingen valusjon v slik at både $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(\neg P) = \mathbf{0}$.

Tautologi / Gyldighet

Definisjon (Tautologi / Gyldighet)

En utsagnslogisk formel A er en **tautologi** (eng: *tautology*) eller er **gyldig** (eng: *valid*) hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for *alle* valuasjoner v . Dette skrives ofte $\models A$.

Eksempel

- Formelen $(P \vee \neg P)$ er en tautologi; for enhver valuasjon v så vil enten $v(P) = \mathbf{1}$ eller $v(\neg P) = \mathbf{1}$.
- Formelen P er *ikke* en tautologi; det fins nemlig en valusjon v slik at $v(P) = \mathbf{0}$.

Motsigelse / Kontradiksjon

Definisjon (Motsigelse / Kontradiksjon)

En utsagnslogisk formel A er **kontradiktorisk** (eng: *contradictory*), eller en **kontradiksjon** (eng: *contradiction*), eller en **motsigelse**, hvis $v(A) = \mathbf{0}$ for *alle* valuasjoner v .

Eksempel

- Formelen $(P \wedge \neg P)$ er kontradiktorisk; det fins ingen valuasjon v som er slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg P) = \mathbf{1}$.
- Formelen P er *ikke* kontradiktorisk; det fins nemlig en valusjon v slik at $v(P) = \mathbf{1}$.

Oppsummering av disse begrepene

En formel er ...

- **oppfyllbar** hvis det er *mulig* å gjøre den **sann**.
(Det fins en valuasjon v slik at $v(A) = \mathbf{1}$.)
- **falsifiserbar** hvis det er *mulig* å gjøre den **usann**.
- **gyldig** hvis den *alltid* er **sann**.
(For enhver valuasjon v , så er det slik at $v(A) = \mathbf{1}$.)
- **kontradiktorisk** hvis den *alltid* er **usann**.

Merk

- Det motsatte av en tautologi er en falsifiserbar formel.
- Det motsatte av en motsigelse er en oppfyllbar formel.
- En tautologi er *ikke* det motsatte av en motsigelse!

Eksempler

Eksempel

- Er $\neg P$ en kontradiksjon?

Nei, fordi det fins en valuasjon v slik at $v(\neg P) = \mathbf{1}$.

- Er $\neg(P \rightarrow P)$ en kontradiksjon?

Ja, fordi $v(\neg(P \rightarrow P)) = \mathbf{0}$ for enhver valuasjon v .

- Det er lett å se dette ved hjelp av en sannhetsverditabell:

P	\neg	$(P \rightarrow P)$
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$

- Er $(P \rightarrow P)$ en kontradiksjon?

Nei, fordi det fins en valuasjon v slik at $v(P \rightarrow P) = \mathbf{1}$.

Eksempler

Eksempel

- Er $((P \vee Q) \rightarrow P)$ en tautologi?
Nei, fordi det fins en valuasjon v slik at $v((P \vee Q) \rightarrow P) = \mathbf{0}$.
- Vi kan bruke en sannhetsverditabell for å se dette:

P	Q	$((P \vee Q) \rightarrow P)$				
1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0

- Den aktuelle valuasjonen kan leses ut av rad tre.
- Den er slik at $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$.

Eksempler

Eksempel

- Er $(P \rightarrow (P \vee Q))$ en tautologi?

Ja, fordi enhver valuasjon v er slik at $v(P \rightarrow (P \vee Q)) = \mathbf{1}$.

Grunnen til dét er at hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så vil også $v(P \vee Q) = \mathbf{1}$.

- Er $(P \rightarrow P)$ en tautologi?

Ja, fordi enhver valuasjon v er slik at $v(P \rightarrow P) = \mathbf{1}$.

Noen viktige begreper

- **Syntaks** — et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- **Semantikk** — en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- **Kalkyle** (eng: *calculus*) — syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne **bevisbare** uttrykk.
- **Sunnhet** (eng: *soundness*) — alle bevisbare uttrykk er tautologier (korrekthet av kalkylen).
- **Kompletthet** (eng: *completeness*) — alle tautologier er bevisbare (kalkylen sterk nok til å fange inn *alle* interessante uttrykk).

Bruk av utsagnslogikk

Hvordan fange inn utsagn?

Griser liker polka.

P

Griser liker disco.

Q

Griser liker **ikke** disco.

$\neg Q$

Griser liker disco **og** polka.

$(P \wedge Q)$

Hvis griser liker polka, **så** liker de disco.

$(P \rightarrow Q)$

Griser liker **hverken** polka **eller** disco.

$(\neg P \wedge \neg Q)$

eller

$\neg(P \vee Q)$

Griser liker **enten** polka **eller** disco.

$(P \vee Q)$

Griser liker polka **eller** liker **ikke** polka.

$(P \vee \neg P)$

Griser liker polka **hvis** de liker disco.

$(Q \rightarrow P)$

Griser liker polka **bare hvis** de liker disco.

$(P \rightarrow Q)$

Hvordan fange inn utsagn?

- Hvis jeg vinner i lotto eller står på eksamen, så blir jeg glad.
 - L = jeg vinner i lotto
 - E = jeg står på eksamen
 - G = jeg blir glad
 - Vi kan representere utsagnet ved formelen $((L \vee E) \rightarrow G)$.
- Jeg blir glad **hvis og bare hvis** jeg vinner i lotto.
 - Vi kan dele denne påstanden inn i to:
 - Jeg blir glad **hvis** jeg vinner i lotto: $(L \rightarrow G)$
 - Jeg blir glad **bare hvis** jeg vinner i lotto: $(G \rightarrow L)$
 - Vi får dermed utsagnet: $(G \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow G)$
 - Vi kan godt bruke konnektivet \leftrightarrow og skrive: $(G \leftrightarrow L)$.
 - Da leser vi $(G \leftrightarrow L)$ som en forkortelse for $(G \rightarrow L) \wedge (L \rightarrow G)$.