INF1800 – Logikk og beregnbarhet

Forelesning 6: Utsagnslogikk

Roger Antonsen

Institutt for informatikk
Universitetet i Oslo

3. september 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-03 12:49)

Mer om bruk av utsagnslogikk

Hvordan fange inn utsagn?

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
  - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
  - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
    (Med andre ord, jeg er glupsk.)

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
  - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
    (Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det bare hvis det er godt.

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
  - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
    (Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\rightarrow$ det er godt.

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
    - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
    - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
      (Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det bare hvis det er godt.
    - Jeg spiser det $\rightarrow$ det er godt.
      (Med andre ord, jeg er kresen.)

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
  - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
    (Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\rightarrow$ det er godt.
    (Med andre ord, jeg er kresen.)
- Jeg spiser det hvis og bare hvis det er godt.

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
  - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
    (Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\rightarrow$ det er godt.
    (Med andre ord, jeg er kresen.)
- Jeg spiser det hvis og bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftrightarrow$ det er godt.

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
  - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
    (Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\rightarrow$ det er godt.
    (Med andre ord, jeg er kresen.)
- Jeg spiser det hvis og bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftrightarrow$ det er godt.
  - Jeg spiser det hviss det er godt.

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
    - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
    - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
      (Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det bare hvis det er godt.
    - Jeg spiser det $\rightarrow$ det er godt.
      (Med andre ord, jeg er kresen.)
- Jeg spiser det hvis og bare hvis det er godt.
    - Jeg spiser det $\leftrightarrow$ det er godt.
    - Jeg spiser det hviss det er godt.
      (Med andre ord, jeg er glupsk, men kresen.)

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
  - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
    (Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\rightarrow$ det er godt.
    (Med andre ord, jeg er kresen.)
- Jeg spiser det hvis og bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftrightarrow$ det er godt.
  - Jeg spiser det hviss det er godt.
    (Med andre ord, jeg er glupsk, men kresen.)
  - På engelsk: I eat it iff it is good.

Nødvendig og tilstrekkelig

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \to B$ uttrykker *hvis* A*, så* B.

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \rightarrow B$ uttrykker *hvis* A*, så* B.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \rightarrow B$ uttrykker *hvis* A*, så* B.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.
- A er en tilstrekkelig betingelse for B.

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \rightarrow B$ uttrykker *hvis* A*, så* B.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.
- A er en tilstrekkelig betingelse for B.
    - Det er *nok* at A er sann for at B også skal være sann.

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \to B$ uttrykker *hvis* A*, så* B.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.
- A er en tilstrekkelig betingelse for B.
    - Det er *nok* at A er sann for at B også skal være sann.
    - B kan være sann uten at A er sann, men *hvis* A er sann, *så* må B være sann.

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \to B$ uttrykker *hvis* A*, så* B.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.
- A er en tilstrekkelig betingelse for B.
  - Det er *nok* at A er sann for at B også skal være sann.
  - B kan være sann uten at A er sann, men *hvis* A er sann, *så* må B være sann.
- B er en nødvendig betingelse for A.

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \to B$ uttrykker *hvis* A, *så* B.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.
- A er en tilstrekkelig betingelse for B.
  - Det er *nok* at A er sann for at B også skal være sann.
  - B kan være sann uten at A er sann, men *hvis* A er sann, *så* må B være sann.
- B er en nødvendig betingelse for A.
  - A kan ikke være sann uten at B også er sann.

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \rightarrow B$ uttrykker *hvis* A*, så* B.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.
- A er en tilstrekkelig betingelse for B.
  - Det er *nok* at A er sann for at B også skal være sann.
  - B kan være sann uten at A er sann, men *hvis* A er sann, *så* må B være sann.
- B er en nødvendig betingelse for A.
  - A kan ikke være sann uten at B også er sann.
  - A er sann bare hvis B er sann.

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \to B$ uttrykker *hvis* A*, så* B.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.
- A er en tilstrekkelig betingelse for B.
  - Det er *nok* at A er sann for at B også skal være sann.
  - B kan være sann uten at A er sann, men *hvis* A er sann, *så* må B være sann.
- B er en nødvendig betingelse for A.
  - A kan ikke være sann uten at B også er sann.
  - A er sann bare hvis B er sann.
- Alt dette betyr det samme, nemlig at *hvis* A*, så* B.

Mer syntaks

Presedensregler

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $P \vee Q$ og $P \vee Q \to R$ som utsagnslogiske formler (selv om parentesene mangler).

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $P \vee Q$ og $P \vee Q \to R$ som utsagnslogiske formler (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik presedens i forhold til hverandre.

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $P \lor Q$ og $P \lor Q \to R$ som utsagnslogiske formler (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik presedens i forhold til hverandre.
    1. $\neg$ binder sterkest.

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $P \lor Q$ og $P \lor Q \to R$ som utsagnslogiske formler (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik presedens i forhold til hverandre.
  1. $\neg$ binder sterkest.
  2. $\land$ binder svakere enn $\neg$.

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $P \lor Q$ og $P \lor Q \to R$ som utsagnslogiske formler (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik presedens i forhold til hverandre.
  1. $\neg$ binder sterkest.
  2. $\land$ binder svakere enn $\neg$.
  3. $\lor$ binder svakere enn både $\neg$ og $\land$.

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $P \vee Q$ og $P \vee Q \to R$ som utsagnslogiske formler (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik presedens i forhold til hverandre.
  1. $\neg$ binder sterkest.
  2. $\wedge$ binder svakere enn $\neg$.
  3. $\vee$ binder svakere enn både $\neg$ og $\wedge$.
  4. $\to$ binder svakest.

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $P \vee Q$ og $P \vee Q \rightarrow R$ som utsagnslogiske formler (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik presedens i forhold til hverandre.
  1. $\neg$ binder sterkest.
  2. $\wedge$ binder svakere enn $\neg$.
  3. $\vee$ binder svakere enn både $\neg$ og $\wedge$.
  4. $\rightarrow$ binder svakest.
- I tillegg er $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$ venstre-assosiative.

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $P \lor Q$ og $P \lor Q \to R$ som utsagnslogiske formler (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik presedens i forhold til hverandre.
  1. $\neg$ binder sterkest.
  2. $\land$ binder svakere enn $\neg$.
  3. $\lor$ binder svakere enn både $\neg$ og $\land$.
  4. $\to$ binder svakest.
- I tillegg er $\land$, $\lor$ og $\to$ venstre-assosiative.
- Vi skal se på eksempler på dette nå.

Presedensregler

Presedensregler

Eksempel

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

$$\neg P \rightarrow Q$$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $\wedge$ binder sterkere enn $\rightarrow$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $\wedge$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \wedge R$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $\land$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \land R$ betyr $(P \rightarrow (Q \land R))$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $\wedge$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \wedge R$ betyr $(P \rightarrow (Q \wedge R))$ og ikke $((P \rightarrow Q) \wedge R)$.

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $\wedge$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \wedge R$ betyr $(P \rightarrow (Q \wedge R))$ og ikke $((P \rightarrow Q) \wedge R)$.

- $\rightarrow$ er venstre-assosiativ

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $\land$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \land R$ betyr $(P \rightarrow (Q \land R))$ og ikke $((P \rightarrow Q) \land R)$.

- $\rightarrow$ er venstre-assosiativ

  $P \rightarrow Q \rightarrow R$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $\wedge$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \wedge R$ betyr $(P \rightarrow (Q \wedge R))$ og ikke $((P \rightarrow Q) \wedge R)$.

- $\rightarrow$ er venstre-assosiativ

  $P \rightarrow Q \rightarrow R$ betyr $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.
- $\wedge$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \wedge R$ betyr $(P \rightarrow (Q \wedge R))$ og ikke $((P \rightarrow Q) \wedge R)$.
- $\rightarrow$ er venstre-assosiativ

  $P \rightarrow Q \rightarrow R$ betyr $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$ og ikke $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $\wedge$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \wedge R$ betyr $(P \rightarrow (Q \wedge R))$ og ikke $((P \rightarrow Q) \wedge R)$.

- $\rightarrow$ er venstre-assosiativ

  $P \rightarrow Q \rightarrow R$ betyr $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$ og ikke $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.

- $\wedge$ og $\vee$ er venstre-assosiative og binder sterkere enn $\rightarrow$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.
- $\land$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \land R$ betyr $(P \rightarrow (Q \land R))$ og ikke $((P \rightarrow Q) \land R)$.
- $\rightarrow$ er venstre-assosiativ

  $P \rightarrow Q \rightarrow R$ betyr $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$ og ikke $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.
- $\land$ og $\lor$ er venstre-assosiative og binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \land Q \land R \rightarrow S \lor T \lor U$

Presedensregler

Eksempel

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og ikke $\neg(P \rightarrow Q)$.
- $\wedge$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \wedge R$ betyr $(P \rightarrow (Q \wedge R))$ og ikke $((P \rightarrow Q) \wedge R)$.
- $\rightarrow$ er venstre-assosiativ

  $P \rightarrow Q \rightarrow R$ betyr $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$ og ikke $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.
- $\wedge$ og $\vee$ er venstre-assosiative og binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \wedge Q \wedge R \rightarrow S \vee T \vee U$ betyr
  $((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow ((S \vee T) \vee U)$

Symboler for sannhetsverdiene

Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.

Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.
- Boka bruker true og false.

Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.
- Boka bruker true og false.
    - Det er også vanlig å bruke $\top$ og $\perp$.

Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.
- Boka bruker true og false.
  - Det er også vanlig å bruke $\top$ og $\bot$.
- Vi må i så fall ta med følgende i definisjonen av mengden **Prop** av utsagnslogiske formler.

Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.
- Boka bruker true og false.
  - Det er også vanlig å bruke $\top$ og $\bot$.
- Vi må i så fall ta med følgende i definisjonen av mengden **Prop** av utsagnslogiske formler.
  - **Prop** inneholder true og false.

Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.
- Boka bruker true og false.
  - Det er også vanlig å bruke $\top$ og $\bot$.
- Vi må i så fall ta med følgende i definisjonen av mengden **Prop** av utsagnslogiske formler.
  - **Prop** inneholder true og false.
- Vi må også ha med følgende krav i definisjonen av en valuasjon.

Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.
- Boka bruker true og false.
  - Det er også vanlig å bruke $\top$ og $\bot$.
- Vi må i så fall ta med følgende i definisjonen av mengden **Prop** av utsagnslogiske formler.
  - **Prop** inneholder true og false.
- Vi må også ha med følgende krav i definisjonen av en valuasjon.
  - $v(\mathsf{true}) = \mathbf{1}$ og $v(\mathsf{false}) = \mathbf{0}$.

Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.
- Boka bruker true og false.
    - Det er også vanlig å bruke $\top$ og $\bot$.
- Vi må i så fall ta med følgende i definisjonen av mengden **Prop** av utsagnslogiske formler.
    - **Prop** inneholder true og false.
- Vi må også ha med følgende krav i definisjonen av en valuasjon.
    - $v(\mathsf{true}) = \mathbf{1}$ og $v(\mathsf{false}) = \mathbf{0}$.
- Så lenge vil følger disse konvensjonene, så er det greit å bruke true og false.

Mer semantikk

Ekvivalens

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens)

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens)

To formler A og B er ekvivalente (eng: *equivalent*) hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable.

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens)

To formler A og B er ekvivalente (eng: *equivalent*) hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable. Sagt på en annen måte, for alle valuasjoner v så vil $v(A) = v(B)$.

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens)

To formler A og B er ekvivalente (eng: *equivalent*) hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable. Sagt på en annen måte, for alle valuasjoner v så vil $v(A) = v(B)$. Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er ekvivalente.

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens)

To formler A og B er ekvivalente (eng: *equivalent*) hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable. Sagt på en annen måte, for alle valuasjoner v så vil $v(A) = v(B)$. Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er ekvivalente. (En annen vanlig skrivemåte er $A \Leftrightarrow B$.)

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens)

To formler A og B er ekvivalente (eng: *equivalent*) hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable. Sagt på en annen måte, for alle valuasjoner v så vil $v(A) = v(B)$. Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er ekvivalente. (En annen vanlig skrivemåte er $A \Leftrightarrow B$.)

- Hvis to formler er ekvivalente, så har de samme meningsinnhold.

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens)

To formler A og B er ekvivalente (eng: *equivalent*) hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable. Sagt på en annen måte, for alle valuasjoner v så vil $v(A) = v(B)$. Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er ekvivalente. (En annen vanlig skrivemåte er $A \Leftrightarrow B$.)

- Hvis to formler er ekvivalente, så har de samme meningsinnhold.
- Hvis to formler *ikke* er ekvivalente, så fins en valuasjon som gjør den ene formelen sann, men ikke den andre.

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens)

To formler A og B er ekvivalente (eng: *equivalent*) hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable. Sagt på en annen måte, for alle valuasjoner v så vil $v(A) = v(B)$. Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er ekvivalente. (En annen vanlig skrivemåte er $A \Leftrightarrow B$.)

- Hvis to formler er ekvivalente, så har de samme meningsinnhold.
- Hvis to formler *ikke* er ekvivalente, så fins en valuasjon som gjør den ene formelen sann, men ikke den andre.
- A og B er ekvivalente hvis og bare hvis $A \leftrightarrow B$ er en tautologi.

Ekvivalens

Ekvivalens

Eksempel

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.

Ekvivalens

Eksempel

- P og ¬¬P er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.

  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{0}$.

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \lor Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{0}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \lor Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{0}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \lor Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{0}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{0}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{0}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \lor Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{0}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.

Ekvivalens

Eksempel

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- $P \to Q$ og $\neg P \lor Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{0}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.
  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \to Q) = v(\neg P \lor Q) = \mathbf{1}$.
- Dette er nøyaktig dette vi gjør når vi lager en sannhetsverditabell.

Viktige ekvivalenser

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

- Distributive lover

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

- Distributive lover

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

- Distributive lover

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

- Distributive lover

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

- Dobbel negasjon

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

- Distributive lover

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

- Dobbel negasjon

$$\neg\neg A \equiv A$$

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

- Distributive lover

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

- Dobbel negasjon

$$\neg\neg A \equiv A$$

- Implikasjon

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

- Distributive lover

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

- Dobbel negasjon

$$\neg\neg A \equiv A$$

- Implikasjon

$$A \to B \equiv \neg A \lor B$$

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

- Distributive lover

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

- Dobbel negasjon

$$\neg\neg A \equiv A$$

- Implikasjon

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$$
$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \land \neg B$$

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

$$\neg(A \land B) \equiv (\neg A \lor \neg B)$$
$$\neg(A \lor B) \equiv (\neg A \land \neg B)$$

- Distributive lover

$$A \land (B \lor C) \equiv (A \land B) \lor (A \land C)$$
$$A \lor (B \land C) \equiv (A \lor B) \land (A \lor C)$$

- Dobbel negasjon

$$\neg\neg A \equiv A$$

- Implikasjon

$$A \rightarrow B \equiv \neg A \lor B$$
$$\neg(A \rightarrow B) \equiv A \land \neg B$$
$$A \rightarrow \mathsf{false} \equiv \neg A$$

Viktige ekvivalenser

Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

$$A \land (B \land C) \equiv (A \land B) \land C$$

Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

$$A \land (B \land C) \equiv (A \land B) \land C$$
$$A \lor (B \lor C) \equiv (A \lor B) \lor C$$

Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

$$A \land (B \land C) \equiv (A \land B) \land C$$
$$A \lor (B \lor C) \equiv (A \lor B) \lor C$$

- Kommutative lover

Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

$$A \land (B \land C) \equiv (A \land B) \land C$$
$$A \lor (B \lor C) \equiv (A \lor B) \lor C$$

- Kommutative lover

$$A \land B \equiv B \land A$$

Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

- Kommutative lover

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$
$$A \vee B \equiv B \vee A$$

Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

- Kommutative lover

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$
$$A \vee B \equiv B \vee A$$

- Det er mange flere...

Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

$$A \land (B \land C) \equiv (A \land B) \land C$$
$$A \lor (B \lor C) \equiv (A \lor B) \lor C$$

- Kommutative lover

$$A \land B \equiv B \land A$$
$$A \lor B \equiv B \lor A$$

- Det er mange flere. . .

Side 354: Figur 6.6: *Equivalences, conversions, basic laws.*

Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

$$A \land (B \land C) \equiv (A \land B) \land C$$
$$A \lor (B \lor C) \equiv (A \lor B) \lor C$$

- Kommutative lover

$$A \land B \equiv B \land A$$
$$A \lor B \equiv B \lor A$$

- Det er mange flere...

  Side 354: Figur 6.6: *Equivalences, conversions, basic laws.*

- Det er en fin øvelse å forsøke å forstå disse, men man trenger ikke å pugge dem.

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B, og B er ekvivalent med C

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B, og B er ekvivalent med C, så kan B erstattes med C uten at sannhetsverdien til A endres.

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B, og B er ekvivalent med C, så kan B erstattes med C uten at sannhetsverdien til A endres. (eng: *Replacement Rule*)

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B, og B er ekvivalent med C, så kan B erstattes med C uten at sannhetsverdien til A endres. (eng: *Replacement Rule*)

Vi har en notasjon for å beskrive substitusjon.

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B, og B er ekvivalent med C, så kan B erstattes med C uten at sannhetsverdien til A endres. (eng: *Replacement Rule*)

Vi har en notasjon for å beskrive substitusjon.

- $A[B/C] = A$ hvor alle forekomster av B er erstattet med C.

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B, og B er ekvivalent med C, så kan B erstattes med C uten at sannhetsverdien til A endres. (eng: *Replacement Rule*)

Vi har en notasjon for å beskrive substitusjon.

- $A[B/C] = A$ hvor alle forekomster av B er erstattet med C.
- Substitusjonsregelen sier derfor:

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B, og B er ekvivalent med C, så kan B erstattes med C uten at sannhetsverdien til A endres. (eng: *Replacement Rule*)

Vi har en notasjon for å beskrive substitusjon.

- $A[B/C] = A$ hvor alle forekomster av B er erstattet med C.
- Substitusjonsregelen sier derfor:
  - Hvis $B \equiv C$, så $A \equiv A[B/C]$.

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B, og B er ekvivalent med C, så kan B erstattes med C uten at sannhetsverdien til A endres. (eng: *Replacement Rule*)

Vi har en notasjon for å beskrive substitusjon.

- $A[\mathrm{B}/\mathrm{C}] = A$ hvor alle forekomster av B er erstattet med C.
- Substitusjonsregelen sier derfor:
  - Hvis $\mathrm{B} \equiv \mathrm{C}$, så $A \equiv A[\mathrm{B}/\mathrm{C}]$.
- Dette danner utgangspunktet for å transformere formler ved hjelp av omskrivingsregler.

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$(A \land B) \to C$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$(A \wedge B) \rightarrow C \quad \equiv$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$(A \land B) \to C \quad \equiv \quad \neg(A \land B) \lor C$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$(A \land B) \to C \quad \equiv \quad \neg(A \land B) \lor C \qquad \text{(implikasjon)}$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$
\begin{aligned}
(A \land B) \to C \quad & \equiv \quad \neg(A \land B) \lor C \qquad \text{(implikasjon)} \\
& \equiv
\end{aligned}
$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$\begin{aligned} (A \land B) \to C &\equiv \neg(A \land B) \lor C \qquad \text{(implikasjon)} \\ &\equiv (\neg A \lor \neg B) \lor C \end{aligned}$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$\begin{aligned}(A \land B) \to C \quad &\equiv \quad \neg(A \land B) \lor C && \text{(implikasjon)} \\ &\equiv \quad (\neg A \lor \neg B) \lor C && \text{(De Morgan)}\end{aligned}$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$\begin{aligned}
(A \land B) \rightarrow C &\equiv \neg(A \land B) \lor C && \text{(implikasjon)}\\
&\equiv (\neg A \lor \neg B) \lor C && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv
\end{aligned}$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$
\begin{aligned}
(A \land B) \to C &\equiv \neg(A \land B) \lor C && \text{(implikasjon)} \\
&\equiv (\neg A \lor \neg B) \lor C && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \neg A \lor (\neg B \lor C)
\end{aligned}
$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \to C &\equiv \neg(A \wedge B) \vee C && \text{(implikasjon)} \\
&\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee C && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) && \text{(assosiativitet)}
\end{aligned}
$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$\begin{array}{rcll}
(A \land B) \to C & \equiv & \neg(A \land B) \lor C & \text{(implikasjon)} \\
& \equiv & (\neg A \lor \neg B) \lor C & \text{(De Morgan)} \\
& \equiv & \neg A \lor (\neg B \lor C) & \text{(assosiativitet)} \\
& \equiv & &
\end{array}$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$
\begin{aligned}
(A \land B) \to C &\equiv \neg(A \land B) \lor C && \text{(implikasjon)} \\
&\equiv (\neg A \lor \neg B) \lor C && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \neg A \lor (\neg B \lor C) && \text{(assosiativitet)} \\
&\equiv \neg A \lor (B \to C)
\end{aligned}
$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$
\begin{aligned}
(A \land B) \rightarrow C &\equiv \neg(A \land B) \lor C && \text{(implikasjon)} \\
&\equiv (\neg A \lor \neg B) \lor C && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \neg A \lor (\neg B \lor C) && \text{(assosiativitet)} \\
&\equiv \neg A \lor (B \rightarrow C) && \text{(implikasjon)}
\end{aligned}
$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$
\begin{aligned}
(A \land B) \to C &\equiv \neg(A \land B) \lor C && \text{(implikasjon)}\\
&\equiv (\neg A \lor \neg B) \lor C && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv \neg A \lor (\neg B \lor C) && \text{(assosiativitet)}\\
&\equiv \neg A \lor (B \to C) && \text{(implikasjon)}\\
&\equiv
\end{aligned}
$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$
\begin{aligned}
(A \wedge B) \rightarrow C &\equiv \neg(A \wedge B) \vee C && \text{(implikasjon)} \\
&\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee C && \text{(De Morgan)} \\
&\equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) && \text{(assosiativitet)} \\
&\equiv \neg A \vee (B \rightarrow C) && \text{(implikasjon)} \\
&\equiv A \rightarrow (B \rightarrow C)
\end{aligned}
$$

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Eksempel

$$
\begin{array}{rcll}
(A \land B) \to C & \equiv & \neg(A \land B) \lor C & \text{(implikasjon)} \\
& \equiv & (\neg A \lor \neg B) \lor C & \text{(De Morgan)} \\
& \equiv & \neg A \lor (\neg B \lor C) & \text{(assosiativitet)} \\
& \equiv & \neg A \lor (B \to C) & \text{(implikasjon)} \\
& \equiv & A \to (B \to C) & \text{(implikasjon)}
\end{array}
$$

Normalformer

Hva er normalformer?

Hva er normalformer?

- Normalformer er forskjellige syntaktiske former som utsagnslogiske formler kan ha.

Hva er normalformer?

- Normalformer er forskjellige syntaktiske former som utsagnslogiske formler kan ha.
- Vi skal se på:

Hva er normalformer?

- Normalformer er forskjellige syntaktiske former som utsagnslogiske formler kan ha.
- Vi skal se på:
  - Disjunktiv normalform

Hva er normalformer?

- Normalformer er forskjellige syntaktiske former som utsagnslogiske formler kan ha.
- Vi skal se på:
  - Disjunktiv normalform
  - Konjunktiv normalform

Hva er normalformer?

- Normalformer er forskjellige syntaktiske former som utsagnslogiske formler kan ha.
- Vi skal se på:
  - Disjunktiv normalform
  - Konjunktiv normalform
- Normalformer gjør oss i stand til å forenkle formler.

Hva er normalformer?

- Normalformer er forskjellige syntaktiske former som utsagnslogiske formler kan ha.
- Vi skal se på:
    - Disjunktiv normalform
    - Konjunktiv normalform
- Normalformer gjør oss i stand til å forenkle formler.
- Normalformer er viktig for automatisk bevissøk.

Hva er normalformer?

- Normalformer er forskjellige syntaktiske former som utsagnslogiske formler kan ha.
- Vi skal se på:
    - Disjunktiv normalform
    - Konjunktiv normalform
- Normalformer gjør oss i stand til å forenkle formler.
- Normalformer er viktig for automatisk bevissøk.
- Vi skal lære oss å transformere en formel til de ulike normalformene.

Literaler

Literaler

Definisjon (Literal)

Et literal er en utsagnsvariabel eller negasjonen av en utsagnsvariabel.

Literaler

Definisjon (Literal)

Et literal er en utsagnsvariabel eller negasjonen av en utsagnsvariabel. (Samt true og false hvis vi tar disse med i det utsagnslogiske språket.)

Literaler

Definisjon (Literal)

Et literal er en utsagnsvariabel eller negasjonen av en utsagnsvariabel. (Samt true og false hvis vi tar disse med i det utsagnslogiske språket.)

Eksempel

Hvis P og Q er utsagnsvariable, så er P, $\neg P$, Q og $\neg Q$ literaler

Literaler

Definisjon (Literal)

Et literal er en utsagnsvariabel eller negasjonen av en utsagnsvariabel. (Samt true og false hvis vi tar disse med i det utsagnslogiske språket.)

Eksempel

Hvis P og Q er utsagnsvariable, så er P, $\neg P$, Q og $\neg Q$ literaler, men $P \land Q$ og $\neg\neg P$ er *ikke* literaler.

Disjunktiv normalform (DNF)

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF)

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler.

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik konjunksjon kalles i boka en fundamental konjunksjon.)

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik konjunksjon kalles i boka en fundamental konjunksjon.)

Eksempel

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik konjunksjon kalles i boka en fundamental konjunksjon.)

Eksempel

- En formel som er på DNF:

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik konjunksjon kalles i boka en fundamental konjunksjon.)

Eksempel

- En formel som er på DNF:
  - $(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik konjunksjon kalles i boka en fundamental konjunksjon.)

Eksempel

- En formel som er på DNF:
  - $(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$
- En formel som ikke er på DNF:

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik konjunksjon kalles i boka en fundamental konjunksjon.)

Eksempel

- En formel som er på DNF:
  - $(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$
- En formel som ikke er på DNF:
  - $(P \land Q) \lor (R \land (S \lor T))$

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på disjunktiv normalform (DNF) hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik konjunksjon kalles i boka en fundamental konjunksjon.)

Eksempel

- En formel som er på DNF:
  - $(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$
- En formel som ikke er på DNF:
  - $(P \land Q) \lor (R \land (S \lor T))$
    (fordi konjunksjonen ikke består av kun literaler)

Disjunktiv normalform (DNF)

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \wedge (Q \vee R)$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \land (Q \lor R)$ er ikke på DNF

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \land (Q \lor R)$ er ikke på DNF, siden den er en konjunksjon.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \land (Q \lor R)$ er ikke på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \land Q$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \land (Q \lor R)$ er ikke på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \land Q$ er på DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \wedge (Q \vee R)$ er ikke på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \wedge Q$ er på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \wedge (Q \vee R)$ er ikke på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \wedge Q$ er på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av to literaler.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \land (Q \lor R)$ er ikke på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \land Q$ er på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av to literaler.
- P

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \land (Q \lor R)$ er ikke på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \land Q$ er på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av to literaler.
- P er også på DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \land (Q \lor R)$ er ikke på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \land Q$ er på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av to literaler.
- P er også på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel

- $P \land (Q \lor R)$ er ikke på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \land Q$ er på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av to literaler.
- P er også på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av kun ett literal.

Disjunktiv normalform (DNF)

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

- $P \to Q$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

- $P \to Q$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$, som er på DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg P \vee Q$, som er på DNF.
- $\neg(P \wedge \neg Q)$

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg P \vee Q$, som er på DNF.
- $\neg(P \wedge \neg Q)$ er ekvivalent med $\neg P \vee Q$

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg P \vee Q$, som er på DNF.
- $\neg(P \wedge \neg Q)$ er ekvivalent med $\neg P \vee Q$, som er på DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

- $P \to Q$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$, som er på DNF.
- $\neg(P \land \neg Q)$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$, som er på DNF.

- Vi kan bevise dette på to forskjellige måter:

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$, som er på DNF.
- $\neg(P \land \neg Q)$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$, som er på DNF.

- Vi kan bevise dette på to forskjellige måter:
    1. Bruke sannhetsverditabeller og konstruere en formel på DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel

- $P \rightarrow Q$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$, som er på DNF.
- $\neg(P \land \neg Q)$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$, som er på DNF.

- Vi kan bevise dette på to forskjellige måter:
  1. Bruke sannhetsverditabeller og konstruere en formel på DNF.
  2. Bruke ekvivalenser og transformere til en formel på DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\rightarrow$	$P)$
1	**1**							

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1		1		1		1

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	1	1		1		1

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	1	1		1	1	1

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	1	1	1	1	1	1
1	**0**							

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1		0		0		1

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0		0		1

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0		0	**1**	1

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**							

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0		1		1		0

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1		1		0

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1		1	**0**	0

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\rightarrow$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**							

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**	0		0		0		0

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**	0	1	0		0		0

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**	0	**1**	0		0	**1**	0

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\rightarrow$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\land$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0

- Rad 1 “svarer til” formelen $(P \land Q)$.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\rightarrow$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\rightarrow$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0

- Rad 1 “svarer til” formelen $(P \wedge Q)$.
- Rad 4 “svarer til” formelen $(\neg P \wedge \neg Q)$.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	(P	→	Q)	∧	(Q	→	P)
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0

- Rad 1 "svarer til" formelen $(P \land Q)$.
- Rad 4 "svarer til" formelen $(\neg P \land \neg Q)$.
- Ved å ta disjunksjonen av disse får vi DNF av den opprinnelige formelen

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \to Q) \wedge (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	$(P$	$\to$	$Q)$	$\wedge$	$(Q$	$\to$	$P)$
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0

- Rad 1 "svarer til" formelen $(P \wedge Q)$.
- Rad 4 "svarer til" formelen $(\neg P \wedge \neg Q)$.
- Ved å ta disjunksjonen av disse får vi DNF av den opprinnelige formelen, $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$.

Disjunktiv normalform (DNF)

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på full disjunktiv normalform hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på full disjunktiv normalform hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Eksempel

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på full disjunktiv normalform hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Eksempel

- $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på full disjunktiv normalform hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Eksempel

- $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$ er på full DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på full disjunktiv normalform hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Eksempel

- $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$ er på full DNF.
- $(P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R)$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på full disjunktiv normalform hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Eksempel

- $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$ er på full DNF.
- $(P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R)$ er på full DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på full disjunktiv normalform hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Eksempel

- $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$ er på full DNF.
- $(P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R)$ er på full DNF.
- $P \lor (\neg P \land Q)$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på full disjunktiv normalform hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Eksempel

- $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$ er på full DNF.
- $(P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R)$ er på full DNF.
- $P \lor (\neg P \land Q)$ er på DNF

Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på full disjunktiv normalform hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Eksempel

- $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$ er på full DNF.
- $(P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R)$ er på full DNF.
- $P \lor (\neg P \land Q)$ er på DNF, men ikke på full DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \vee (Q \to R) \wedge S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \vee (Q \rightarrow R) \wedge S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$(P \vee (Q \rightarrow R)) \wedge S$$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \vee (Q \rightarrow R) \wedge S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$
\begin{aligned}
& (P \vee (Q \rightarrow R)) \wedge S \\
\equiv \; &
\end{aligned}
$$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \lor (Q \to R) \land S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$
\begin{array}{rl}
 & (P \lor (Q \to R)) \land S \\
\equiv & (P \lor (\neg Q \lor R)) \land S
\end{array}
$$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \lor (Q \to R) \land S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$
\begin{aligned}
& (P \lor (Q \to R)) \land S \\
\equiv \quad & (P \lor (\neg Q \lor R)) \land S \\
\equiv \quad &
\end{aligned}
$$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \vee (Q \rightarrow R) \wedge S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$
\begin{aligned}
& (P \vee (Q \rightarrow R)) \wedge S \\
\equiv \quad & (P \vee (\neg Q \vee R)) \wedge S \\
\equiv \quad & (P \vee \neg Q \vee R) \wedge S
\end{aligned}
$$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \lor (Q \to R) \land S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$\begin{aligned}
& (P \lor (Q \to R)) \land S \\
\equiv \quad & (P \lor (\neg Q \lor R)) \land S \\
\equiv \quad & (P \lor \neg Q \lor R) \land S \\
\equiv \quad &
\end{aligned}$$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \lor (Q \to R) \land S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$
\begin{aligned}
& (P \lor (Q \to R)) \land S \\
\equiv \quad & (P \lor (\neg Q \lor R)) \land S \\
\equiv \quad & (P \lor \neg Q \lor R) \land S \\
\equiv \quad & (P \land S) \lor (\neg Q \land S) \lor (R \land S)
\end{aligned}
$$

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \lor (Q \to R) \land S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$
\begin{aligned}
& (P \lor (Q \to R)) \land S \\
\equiv\quad & (P \lor (\neg Q \lor R)) \land S \\
\equiv\quad & (P \lor \neg Q \lor R) \land S \\
\equiv\quad & (P \land S) \lor (\neg Q \land S) \lor (R \land S)
\end{aligned}
$$

- Denne er på DNF, men ikke på full DNF.

Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av $(P \lor (Q \to R) \land S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$
\begin{array}{rl}
 & (P \lor (Q \to R)) \land S \\
\equiv & (P \lor (\neg Q \lor R)) \land S \\
\equiv & (P \lor \neg Q \lor R) \land S \\
\equiv & (P \land S) \lor (\neg Q \land S) \lor (R \land S)
\end{array}
$$

- Denne er på DNF, men ikke på full DNF.
- Her ville vi ellers ha brukt en sannhetsverditabell med 16 rader.

Konjunktiv normalform (CNF)

Konjunktiv normalform (CNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på konjunktiv normalform (CNF, eller KNF)

Konjunktiv normalform (CNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på konjunktiv normalform (CNF, eller KNF) hvis den er en konjunksjon

Konjunktiv normalform (CNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på konjunktiv normalform (CNF, eller KNF) hvis den er en konjunksjon av en eller flere disjunksjoner

Konjunktiv normalform (CNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på konjunktiv normalform (CNF, eller KNF) hvis den er en konjunksjon av en eller flere disjunksjoner og hvor hver disjunksjon består av en eller flere literaler.

Konjunktiv normalform (CNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på konjunktiv normalform (CNF, eller KNF) hvis den er en konjunksjon av en eller flere disjunksjoner og hvor hver disjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik disjunksjon kalles i boka en fundamental disjunksjon.)

Konjunktiv normalform (CNF)

Definisjon

En utsagnslogisk formel er på konjunktiv normalform (CNF, eller KNF) hvis den er en konjunksjon av en eller flere disjunksjoner og hvor hver disjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik disjunksjon kalles i boka en fundamental disjunksjon.)

Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på konjunktiv normalform.

Noen oppgaver

Oppgave

Vis at $\neg(P \to Q) \equiv P \land \neg Q$.

Oppgave

Vis at $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$.

- Oppgaven går ut på å vise at $\neg(P \to Q)$ og $P \wedge \neg Q$ er ekvivalente.

Oppgave

Vis at $\neg(P \to Q) \equiv P \land \neg Q$.

- Oppgaven går ut på å vise at $\neg(P \to Q)$ og $P \land \neg Q$ er ekvivalente.
  - Da må man (selvfølgelig!) vite hva det betyr at to formler er ekvivalente.

Oppgave

Vis at $\neg(P \to Q) \equiv P \land \neg Q$.

- Oppgaven går ut på å vise at $\neg(P \to Q)$ og $P \land \neg Q$ er ekvivalente.
  - Da må man (selvfølgelig!) vite hva det betyr at to formler er ekvivalente.
  - Det er at formlene *har samme sannhetsverdi for samme tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariablene*.

Oppgave

Vis at $\neg(P \to Q) \equiv P \land \neg Q$.

- Oppgaven går ut på å vise at $\neg(P \to Q)$ og $P \land \neg Q$ er ekvivalente.
  - Da må man (selvfølgelig!) vite hva det betyr at to formler er ekvivalente.
  - Det er at formlene *har samme sannhetsverdi for samme tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariablene*.
- Den enkleste måten å løse denne oppgaven på er å lage en sannhetsverditabell og bruke denne til å forklare hvorfor formlene er ekvivalente.

Oppgave

Vis at $\equiv$ er en ekvivalensrelasjon på mengden av utsagnslogiske formler.

Oppgave

Vis at $\equiv$ er en ekvivalensrelasjon på mengden av utsagnslogiske formler.

- Oppgaven går ut på å bevise eller føre et presist argument for påstanden.

Oppgave

Vis at $\equiv$ er en ekvivalensrelasjon på mengden av utsagnslogiske formler.

- Oppgaven går ut på å bevise eller føre et presist argument for påstanden.
  - Da må man (selvfølgelig!) vite hva en ekvivalensrelasjon er.

Oppgave

Vis at $\equiv$ er en ekvivalensrelasjon på mengden av utsagnslogiske formler.

- Oppgaven går ut på å bevise eller føre et presist argument for påstanden.
  - Da må man (selvfølgelig!) vite hva en ekvivalensrelasjon er.
  - Det er *binær relasjon (på mengden av formler) som er refleksiv, symmetrisk og transitiv*.

Oppgave

Vis at $\equiv$ er en ekvivalensrelasjon på mengden av utsagnslogiske formler.

- Oppgaven går ut på å bevise eller føre et presist argument for påstanden.
  - Da må man (selvfølgelig!) vite hva en ekvivalensrelasjon er.
  - Det er *binær relasjon (på mengden av formler) som er refleksiv, symmetrisk og transitiv*.
- Her bør man ta for seg de ulike bestanddelene av hva det vil si å være en ekvivalensrelasjon og sjekke de hver for seg.

Tillegg

Oppfyllbare mengder

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S.

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S. Dette skrives ofte $v \models S$.

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S. Dette skrives ofte $v \models S$.
- En mengde utsagnslogisk formler er oppfyllbar (eng: *satisfiable*)

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S. Dette skrives ofte $v \models S$.
- En mengde utsagnslogisk formler er oppfyllbar (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S. Dette skrives ofte $v \models S$.
- En mengde utsagnslogisk formler er oppfyllbar (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S. Dette skrives ofte $v \models S$.
- En mengde utsagnslogisk formler er oppfyllbar (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Mengden $\{\neg P, Q\}$ er oppfyllbar;

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S. Dette skrives ofte $v \models S$.
- En mengde utsagnslogisk formler er oppfyllbar (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Mengden $\{\neg P, Q\}$ er oppfyllbar; den oppfylles av enhver valuasjon v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S. Dette skrives ofte $v \models S$.
- En mengde utsagnslogisk formler er oppfyllbar (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Mengden $\{\neg P, Q\}$ er oppfyllbar; den oppfylles av enhver valuasjon v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.
- Mengden $\{P, \neg P\}$ er *ikke* oppfyllbar;

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde)

- En valuasjon v oppfyller (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S. Dette skrives ofte $v \models S$.
- En mengde utsagnslogisk formler er oppfyllbar (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

Eksempel

- Mengden $\{\neg P, Q\}$ er oppfyllbar; den oppfylles av enhver valuasjon v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.
- Mengden $\{P, \neg P\}$ er *ikke* oppfyllbar; det fins ingen valusjon v slik at både $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg P) = \mathbf{1}$.