INF1800 – Forelesning 6

Utsagnslogikk

Roger Antonsen - 3. september 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-03 12:49)

Mer om bruk av utsagnslogikk

Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftarrow$ det er godt.
  - Det er godt $\rightarrow$ jeg spiser det.
    (Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\rightarrow$ det er godt.
    (Med andre ord, jeg er kresen.)
- Jeg spiser det hvis og bare hvis det er godt.
  - Jeg spiser det $\leftrightarrow$ det er godt.
  - Jeg spiser det hviss det er godt.
    (Med andre ord, jeg er glupsk, men kresen.)
  - På engelsk: I eat it iff it is good.

Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen $A \rightarrow B$ uttrykker *hvis* A*, så* B.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.
- A er en tilstrekkelig betingelse for B.
  - Det er *nok* at A er sann for at B også skal være sann.
  - B kan være sann uten at A er sann, men *hvis* A er sann, *så* må B være sann.
- B er en nødvendig betingelse for A.
  - A kan ikke være sann uten at B også er sann.
  - A er sann bare hvis B er sann.
- Alt dette betyr det samme, nemlig at *hvis* A*, så* B.

Mer syntaks

Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks. $P \lor Q$ og $P \lor Q \rightarrow R$ som utsagnslogiske formler (selv om parentesene mangler).

- Vi gir konnektivene ulik *presedens* i forhold til hverandre.
  1. $\neg$ binder sterkest.
  2. $\wedge$ binder svakere enn $\neg$.
  3. $\vee$ binder svakere enn både $\neg$ og $\wedge$.
  4. $\rightarrow$ binder svakest.
- I tillegg er $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$ *venstre-assosiative*.
- Vi skal se på eksempler på dette nå.

Eksempel.

- $\neg$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $\neg P \rightarrow Q$ betyr $(\neg P \rightarrow Q)$ og *ikke* $\neg(P \rightarrow Q)$.

- $\wedge$ binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \rightarrow Q \wedge R$ betyr $(P \rightarrow (Q \wedge R))$ og *ikke* $((P \rightarrow Q) \wedge R)$.

- $\rightarrow$ er venstre-assosiativ

  $P \rightarrow Q \rightarrow R$ betyr $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$ og *ikke* $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$.

- $\wedge$ og $\vee$ er venstre-assosiative og binder sterkere enn $\rightarrow$

  $P \wedge Q \wedge R \rightarrow S \vee T \vee U$ betyr $((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow ((S \vee T) \vee U)$

Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.
- Boka bruker true og false.
  - Det er også vanlig å bruke $\top$ og $\bot$.
- Vi må i så fall ta med følgende i definisjonen av mengden **Prop** av utsagnslogiske formler.
  - **Prop** inneholder true og false.
- Vi må også ha med følgende krav i definisjonen av en valuasjon.
  - $v(\mathsf{true}) = \mathbf{1}$ og $v(\mathsf{false}) = \mathbf{0}$.
- Så lenge vil følger disse konvensjonene, så er det greit å bruke true og false.

Mer semantikk

Ekvivalens

Definisjon (Ekvivalens).
To formler A og B er *ekvivalente* (eng: *equivalent*) hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable. Sagt på en annen måte, for alle valuasjoner v så vil $v(A) = v(B)$. Vi skriver $A \equiv B$ når A og B er ekvivalente. (En annen vanlig skrivemåte er $A \Leftrightarrow B$.)

- Hvis to formler er ekvivalente, så har de samme meningsinnhold.
- Hvis to formler *ikke* er ekvivalente, så fins en valuasjon som gjør den ene formelen sann, men ikke den andre.
- A og B er *ekvivalente* hvis og bare hvis $A \leftrightarrow B$ er en tautologi.

Eksempel.

- P og $\neg\neg P$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{1}$.

  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$, så er $v(\neg\neg P) = \mathbf{0}$.

Eksempel.

- $P \rightarrow Q$ og $\neg P \vee Q$ er ekvivalente.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.

  Hvis $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{0}$.

  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{1}$, så er $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.

  Hvis $v(P) = \mathbf{0}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$, så er $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = \mathbf{1}$.
- Dette er nøyaktig dette vi gjør når vi lager en sannhetsverditabell.

Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover

  $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$

  $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
- Distributive lover

  $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

  $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Dobbel negasjon

  $\neg\neg A \equiv A$
- Implikasjon

  $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$

  $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$

  $A \rightarrow \mathsf{false} \equiv \neg A$
- Assosiative lover

  $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

  $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$

- Kommutative lover

  $A \land B \equiv B \land A$

  $A \lor B \equiv B \lor A$
- Det er mange flere...

  Side 354: Figur 6.6: *Equivalences, conversions, basic laws.*
- Det er en fin øvelse å forsøke å forstå disse, men man trenger ikke å pugge dem.

Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

Definisjon (Substitusjonsregelen).
Hvis en utsagnslogisk formel A innholder en annen utsagnslogisk formel B, og B er ekvivalent med C, så kan B erstattes med C uten at sannhetsverdien til A endres. (eng: *Replacement Rule*)

Vi har en notasjon for å beskrive substitusjon.

- $A[B/C] = A$ hvor alle forekomster av B er erstattet med C.
- Substitusjonsregelen sier derfor:
  - Hvis $B \equiv C$, så $A \equiv A[B/C]$.
- Dette danner utgangspunktet for å transformere formler ved hjelp av omskrivingsregler.

Eksempel.

$$\begin{aligned}
(A \land B) \to C &\equiv \neg(A \land B) \lor C && \text{(implikasjon)}\\
&\equiv (\neg A \lor \neg B) \lor C && \text{(De Morgan)}\\
&\equiv \neg A \lor (\neg B \lor C) && \text{(assosiativitet)}\\
&\equiv \neg A \lor (B \to C) && \text{(implikasjon)}\\
&\equiv A \to (B \to C) && \text{(implikasjon)}
\end{aligned}$$

Normalformer

Hva er normalformer?

- Normalformer er forskjellige syntaktiske former som utsagnslogiske formler kan ha.
- Vi skal se på:
  - Disjunktiv normalform
  - Konjunktiv normalform
- Normalformer gjør oss i stand til å forenkle formler.
- Normalformer er viktig for *automatisk bevissøk*.
- Vi skal lære oss å transformere en formel til de ulike normalformene.

Literaler

Definisjon (Literal).
Et *literal* er en utsagnsvariabel eller negasjonen av en utsagnsvariabel. (Samt true og false hvis vi tar disse med i det utsagnslogiske språket.)

Eksempel.
Hvis P og Q er utsagnsvariable, så er P, $\neg P$, Q og $\neg Q$ literaler, men $P \land Q$ og $\neg\neg P$ er *ikke* literaler.

Disjunktiv normalform (DNF)

Definisjon.
En utsagnslogisk formel er på *disjunktiv normalform (DNF)* hvis den er en disjunksjon av en eller flere konjunksjoner og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik konjunksjon kalles i boka en *fundamental konjunksjon*.)

Eksempel.

- En formel som er på DNF:
  - $(P \land Q) \lor (\neg P \land Q) \lor (P \land \neg Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$
- En formel som *ikke* er på DNF:
  - $(P \land Q) \lor (R \land (S \lor T))$ (fordi konjunksjonen ikke består av kun literaler)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

Eksempel.

- $P \land (Q \lor R)$ er *ikke* på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \land Q$ er på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av to literaler.
- P er også på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av kun ett literal.

Teorem.
Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

Eksempel.
- $P \to Q$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$, som er på DNF.
- $\neg(P \land \neg Q)$ er ekvivalent med $\neg P \lor Q$, som er på DNF.

- Vi kan bevise dette på to forskjellige måter:
  1. Bruke sannhetsverditabeller og konstruere en formel på DNF.
  2. Bruke ekvivalenser og transformere til en formel på DNF.
- Vi finner DNF av $(P \to Q) \land (Q \to P)$ ved å bruke en sannhetsverditabell.

P	Q	(P	→	Q)	∧	(Q	→	P)
1	**1**	1	**1**	1	**1**	1	**1**	1
1	**0**	1	**0**	0	**0**	0	**1**	1
0	**1**	0	**1**	1	**0**	1	**0**	0
0	**0**	0	**1**	0	**1**	0	**1**	0

- Rad 1 "svarer til" formelen $(P \land Q)$.
- Rad 4 "svarer til" formelen $(\neg P \land \neg Q)$.
- Ved å ta disjunksjonen av disse får vi DNF av den opprinnelige formelen, $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$.
- Boken kaller dette for full disjunktiv normalform.

Definisjon (Full disjunktiv normalform).
En formel på disjunktiv normalform er på *full disjunktiv normalform* hvis hver konjuksjon består av n literaler, hvor n er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

Eksempel.
- $(P \land Q) \lor (\neg P \land \neg Q)$ er på full DNF.
- $(P \land Q \land R) \lor (\neg P \land \neg Q \land R)$ er på full DNF.
- $P \lor (\neg P \land Q)$ er på DNF, men ikke på full DNF.

- Vi finner DNF av $(P \vee (Q \to R) \wedge S$ ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$
\begin{aligned}
& (P \vee (Q \to R)) \wedge S \\
\equiv \quad & (P \vee (\neg Q \vee R)) \wedge S \\
\equiv \quad & (P \vee \neg Q \vee R) \wedge S \\
\equiv \quad & (P \wedge S) \vee (\neg Q \wedge S) \vee (R \wedge S)
\end{aligned}
$$

- Denne er på DNF, men ikke på full DNF.
- Her ville vi ellers ha brukt en sannhetsverditabell med 16 rader.

Konjunktiv normalform (CNF)

Definisjon.
En utsagnslogisk formel er på *konjunktiv normalform (CNF, eller KNF)* hvis den er en konjunksjon av en eller flere disjunksjoner og hvor hver disjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik disjunksjon kalles i boka en *fundamental disjunksjon*.)

Teorem.
Enhver formel er ekvivalent med en formel på konjunktiv normalform.

Noen oppgaver

Oppgave.
Vis at $\neg(P \to Q) \equiv P \wedge \neg Q$.

- Oppgaven går ut på å vise at $\neg(P \to Q)$ og $P \wedge \neg Q$ er ekvivalente.
  - Da må man (selvfølgelig!) vite hva det betyr at to formler er ekvivalente.
  - Det er at formlene *har samme sannhetsverdi for samme tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariablene*.
- Den enkleste måten å løse denne oppgaven på er å lage en sannhetsverditabell og bruke denne til å forklare hvorfor formlene er ekvivalente.

Oppgave.
Vis at $\equiv$ er en ekvivalensrelasjon på mengden av utsagnslogiske formler.

- Oppgaven går ut på å bevise eller føre et presist argument for påstanden.

- Da må man (selvfølgelig!) vite hva en ekvivalensrelasjon er.
- Det er *binær relasjon (på mengden av formler) som er refleksiv, symmetrisk og transitiv*.

- Her bør man ta for seg de ulike bestanddelene av hva det vil si å være en ekvivalensrelasjon og sjekke de hver for seg.

Tillegg

Oppfyllbare mengder

Definisjon (Oppfyllbar mengde).

- En valuasjon v *oppfyller* (eng: *satisfies*) en mengde S av utsagnslogiske formler hvis $v(A) = \mathbf{1}$ for alle A i S. Dette skrives ofte $v \models S$.
- En mengde utsagnslogisk formler er *oppfyllbar* (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

Eksempel.

- Mengden $\{\neg P, Q\}$ er oppfyllbar; den oppfylles av enhver valuasjon v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.
- Mengden $\{P, \neg P\}$ er *ikke* oppfyllbar; det fins ingen valusjon v slik at både $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(\neg P) = \mathbf{1}$.