

# INF1800 – LOGIKK OG BEREGNBARHET

## FORELESNING 6: UTSAGNSLOGIKK

Roger Antonsen

Institutt for informatikk  
Universitetet i Oslo

3. september 2008

(Sist oppdatert: 2008-09-03 12:49)

## Mer om bruk av utsagnslogikk

### Hvordan fange inn utsagn?

- Jeg spiser det **hvis** det er godt.
  - Jeg spiser det  $\leftarrow$  det er godt.
  - Det er godt  $\rightarrow$  jeg spiser det.  
(Med andre ord, jeg er glupsk.)
- Jeg spiser det **bare hvis** det er godt.
  - Jeg spiser det  $\rightarrow$  det er godt.  
(Med andre ord, jeg er kresen.)
- Jeg spiser det **hvis og bare hvis** det er godt.
  - Jeg spiser det  $\leftrightarrow$  det er godt.
  - Jeg spiser det **hvis** det er godt.  
(Med andre ord, jeg er glupsk, men kresen.)
  - På engelsk: I eat it **iff** it is good.

### Nødvendig og tilstrekkelig

- Formelen  $A \rightarrow B$  uttrykker *hvis A, så B*.
- Det er verdt å tenke litt over hva som ligger i det.
- A er en **tilstrekkelig** betingelse for B.
  - Det er *nok* at A er sann for at B også skal være sann.
  - B kan være sann uten at A er sann, men *hvis* A er sann, så må B være sann.
- B er en **nødvendig** betingelse for A.
  - A kan ikke være sann uten at B også er sann.
  - A er sann **bare hvis** B er sann.
- Alt dette betyr det samme, nemlig at *hvis A, så B*.

## Mer syntaks

## Presedensregler

- Vi kan være ganske frie når vi skriver utsagnslogiske formler, men da må vi ha noen konvensjoner som fjerner tvetydigheter.
- Mengden **Prop** er helt presist definert, men vi skal også godta f.eks.  $P \vee Q$  og  $P \vee Q \rightarrow R$  som **utsagnslogiske formler** (selv om parentesene mangler).
- Vi gir konnektivene ulik **presedens** i forhold til hverandre.
  1.  $\neg$  binder sterkest.
  2.  $\wedge$  binder svakere enn  $\neg$ .
  3.  $\vee$  binder svakere enn både  $\neg$  og  $\wedge$ .
  4.  $\rightarrow$  binder svakest.
- I tillegg er  $\wedge$ ,  $\vee$  og  $\rightarrow$  **venstre-assosiative**.
- Vi skal se på eksempler på dette nå.

## Presedensregler

### Eksempel

- $\neg$  binder sterkere enn  $\rightarrow$   
 $\neg P \rightarrow Q$  betyr  $(\neg P \rightarrow Q)$  og **ikke**  $\neg(P \rightarrow Q)$ .
- $\wedge$  binder sterkere enn  $\rightarrow$   
 $P \rightarrow Q \wedge R$  betyr  $(P \rightarrow (Q \wedge R))$  og **ikke**  $((P \rightarrow Q) \wedge R)$ .
- $\rightarrow$  er venstre-assosiativ  
 $P \rightarrow Q \rightarrow R$  betyr  $((P \rightarrow Q) \rightarrow R)$  og **ikke**  $(P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ .
- $\wedge$  og  $\vee$  er venstre-assosiative og binder sterkere enn  $\rightarrow$   
 $P \wedge Q \wedge R \rightarrow S \vee T \vee U$  betyr  
 $((P \wedge Q) \wedge R) \rightarrow ((S \vee T) \vee U)$

## Symboler for sannhetsverdiene

- Det er ofte hensiktsmessig å ha utsagnslogiske formler som betegner sannhetsverdiene, **1** og **0**.
- Boka bruker true og false.
  - Det er også vanlig å bruke  $\top$  og  $\perp$ .
- Vi må i så fall ta med følgende i definisjonen av mengden **Prop** av utsagnslogiske formler.
  - **Prop** inneholder true og false.
- Vi må også ha med følgende krav i definisjonen av en valuasjon.
  - $v(\text{true}) = \mathbf{1}$  og  $v(\text{false}) = \mathbf{0}$ .
- Så lenge vil følger disse konvensjonene, så er det greit å bruke true og false.

## Mer semantikk

## Ekvivalens

### Definisjon (Ekvivalens)

To formler  $A$  og  $B$  er **ekvivalente** (eng: *equivalent*) hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable. Sagt på en annen måte, for alle valuasjoner  $v$  så vil  $v(A) = v(B)$ . Vi skriver  $A \equiv B$  når  $A$  og  $B$  er ekvivalente. (En annen vanlig skrivemåte er  $A \leftrightarrow B$ .)

- Hvis to formler er ekvivalente, så har de samme meningsinnhold.
- Hvis to formler *ikke* er ekvivalente, så fins en valuasjon som gjør den ene formelen sann, men ikke den andre.
- $A$  og  $B$  er **ekvivalente** hvis og bare hvis  $A \leftrightarrow B$  er en tautologi.

## Ekvivalens

### Eksempel

- $P$  og  $\neg\neg P$  er ekvivalente.  
Hvis  $v(P) = 1$ , så er  $v(\neg\neg P) = 1$ .  
Hvis  $v(P) = 0$ , så er  $v(\neg\neg P) = 0$ .

### Eksempel

- $P \rightarrow Q$  og  $\neg P \vee Q$  er ekvivalente.  
Hvis  $v(P) = 1$  og  $v(Q) = 1$ , så er  $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = 1$ .  
Hvis  $v(P) = 1$  og  $v(Q) = 0$ , så er  $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = 0$ .  
Hvis  $v(P) = 0$  og  $v(Q) = 1$ , så er  $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = 1$ .  
Hvis  $v(P) = 0$  og  $v(Q) = 0$ , så er  $v(P \rightarrow Q) = v(\neg P \vee Q) = 1$ .
- Dette er nøyaktig dette vi gjør når vi lager en sannhetsverditabell.

## Viktige ekvivalenser

- De Morgans lover  
 $\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$   
 $\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$
- Distributive lover  
 $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$   
 $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
- Dobbel negasjon  
 $\neg\neg A \equiv A$
- Implikasjon  
 $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$   
 $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$   
 $A \rightarrow \text{false} \equiv \neg A$

## Viktige ekvivalenser

- Assosiative lover

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$


$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$

- Kommutative lover

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$

$$A \vee B \equiv B \vee A$$

- Det er mange flere. . .

 Side 354: Figur 6.6: *Equivalences, conversions, basic laws.*

- Det er en fin øvelse å forsøke å forstå disse, men man trenger ikke å pugge dem.

## Ekvivalenser som omskrivingsregler

Å erstatte likt med likt endrer ikke verdien til et uttrykk.

### Definisjon (Substitusjonsregelen)

Hvis en utsagnslogisk formel  $A$  inneholder en annen utsagnslogisk formel  $B$ , og  $B$  er ekvivalent med  $C$ , så kan  $B$  erstattes med  $C$  uten at sannhetsverdien til  $A$  endres. (eng: *Replacement Rule*)

Vi har en notasjon for å beskrive substitusjon.

- $A[B/C] = A$  hvor alle forekomster av  $B$  er erstattet med  $C$ .
- Substitusjonsregelen sier derfor:
  - Hvis  $B \equiv C$ , så  $A \equiv A[B/C]$ .
- Dette danner utgangspunktet for å transformere formler ved hjelp av [omskrivingsregler](#).

## Ekvivalenser som omskrivingsregler

### Eksempel

$$\begin{aligned}(A \wedge B) \rightarrow C &\equiv \neg(A \wedge B) \vee C && \text{(implikasjon)} \\ &\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee C && \text{(De Morgan)} \\ &\equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) && \text{(assosiativitet)} \\ &\equiv \neg A \vee (B \rightarrow C) && \text{(implikasjon)} \\ &\equiv A \rightarrow (B \rightarrow C) && \text{(implikasjon)}\end{aligned}$$

## Normalformer

## Hva er normalformer?

- Normalformer er forskjellige syntaktiske former som utsagnslogiske formler kan ha.
- Vi skal se på:
  - Disjunktiv normalform
  - Konjunktiv normalform
- Normalformer gjør oss i stand til å **forenkle** formler.
- Normalformer er viktig for **automatisk bevissøk**.
- Vi skal lære oss å **transformere** en formel til de ulike normalformene.

## Literaler

### Definisjon (Literal)

Et **literal** er en utsagnsvariabel eller negasjonen av en utsagnsvariabel. (Samt true og false hvis vi tar disse med i det utsagnslogiske språket.)

### Eksempel

Hvis  $P$  og  $Q$  er utsagnsvariable, så er  $P$ ,  $\neg P$ ,  $Q$  og  $\neg Q$  literaler, men  $P \wedge Q$  og  $\neg\neg P$  er *ikke* literaler.

## Disjunktiv normalform (DNF)

### Definisjon

En utsagnslogisk formel er på **disjunktiv normalform (DNF)** hvis den er en **disjunksjon** av en eller flere **konjunksjoner** og hvor hver konjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik konjunksjon kalles i boka en **fundamental konjunksjon**.)

### Eksempel

- En formel som er på DNF:
  - $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
- En formel som **ikke** er på DNF:
  - $(P \wedge Q) \vee (R \wedge (S \vee T))$   
(fordi konjunksjonen ikke består av kun literaler)

## Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi godtar disjunksjoner med kun én disjunkt.
- Vi godtar konjunksjoner med kun én konjunkt.

### Eksempel

- $P \wedge (Q \vee R)$  er **ikke** på DNF, siden den er en konjunksjon.
- $P \wedge Q$  er på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av to literaler.
- $P$  er også på DNF. Det er fordi den er en disjunksjon som består av kun én konjunksjon. Denne konjunksjonen består igjen av kun ett literal.

## Disjunktiv normalform (DNF)

### Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på disjunktiv normalform.

### Eksempel

- $P \rightarrow Q$  er ekvivalent med  $\neg P \vee Q$ , som er på DNF.
  - $\neg(P \wedge \neg Q)$  er ekvivalent med  $\neg P \vee Q$ , som er på DNF.
- Vi kan bevise dette på to forskjellige måter:
1. Bruke sannhetsverditabeller og konstruere en formel på DNF.
  2. Bruke ekvivalenser og transformere til en formel på DNF.

## Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av  $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$  ved å bruke en sannhetsverditabell.

| P | Q | (P → Q) | ∧ | (Q → P) |
|---|---|---------|---|---------|
| 1 | 1 | 1       | 1 | 1       |
| 1 | 0 | 0       | 0 | 0       |
| 0 | 1 | 1       | 0 | 0       |
| 0 | 0 | 1       | 1 | 0       |

- Rad 1 “svarer til” formelen  $(P \wedge Q)$ .
- Rad 4 “svarer til” formelen  $(\neg P \wedge \neg Q)$ .
- Ved å ta disjunksjonen av disse får vi DNF av den opprinnelige formelen,  $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ .

## Disjunktiv normalform (DNF)

- Boken kaller dette for **full disjunktiv normalform**.

### Definisjon (Full disjunktiv normalform)

En formel på disjunktiv normalform er på **full disjunktiv normalform** hvis hver konjunksjon består av  $n$  literaler, hvor  $n$  er antall forskjellige utsagnsvariable i formelen.

### Eksempel

- $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$  er på full DNF.
- $(P \wedge Q \wedge R) \vee (\neg P \wedge \neg Q \wedge R)$  er på full DNF.
- $P \vee (\neg P \wedge Q)$  er på DNF, men ikke på full DNF.

## Disjunktiv normalform (DNF)

- Vi finner DNF av  $(P \vee (Q \rightarrow R)) \wedge S$  ved å bruke ekvivalenser og å transformere formelen.

$$\begin{aligned} & (P \vee (Q \rightarrow R)) \wedge S \\ \equiv & (P \vee (\neg Q \vee R)) \wedge S \\ \equiv & (P \vee \neg Q \vee R) \wedge S \\ \equiv & (P \wedge S) \vee (\neg Q \wedge S) \vee (R \wedge S) \end{aligned}$$

- Denne er på DNF, men ikke på full DNF.
- Her ville vi ellers ha brukt en sannhetsverditabell med 16 rader.

## Konjunktiv normalform (CNF)

### Definisjon

En utsagnslogisk formel er på **konjunktiv normalform (CNF, eller KNF)** hvis den er en **konjunksjon** av en eller flere **disjunksjoner** og hvor hver disjunksjon består av en eller flere literaler. (En slik disjunksjon kalles i boka en **fundamental disjunksjon**.)

### Teorem

Enhver formel er ekvivalent med en formel på konjunktiv normalform.

## Noen oppgaver

### Oppgave

Vis at  $\neg(P \rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ .

- Oppgaven går ut på å vise at  $\neg(P \rightarrow Q)$  og  $P \wedge \neg Q$  er **ekvivalente**.
  - Da må man (selvfølgelig!) vite hva det betyr at to formler er ekvivalente.
  - Det er at formlene *har samme sannhetsverdi for samme tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariablene*.
- Den enkleste måten å løse denne oppgaven på er å lage en sannhetsverditabell **og** bruke denne til å forklare hvorfor formlene er ekvivalente.

### Oppgave

Vis at  $\equiv$  er en ekvivalensrelasjon på mengden av utsagnslogiske formler.

- Oppgaven går ut på å **bevise** eller **føre et presist argument for påstanden**.
  - Da må man (selvfølgelig!) vite hva en ekvivalensrelasjon er.
  - Det er *binær relasjon (på mengden av formler) som er refleksiv, symmetrisk og transitiv*.
- Her bør man ta for seg de ulike bestanddelene av hva det vil si å være en ekvivalensrelasjon og sjekke de hver for seg.

# Tillegg

## Oppfyllebare mengder

### Definisjon (Oppfyllebar mengde)

- En valuasjon  $v$  **oppfyller** (eng: *satisfies*) en mengde  $S$  av utsagnslogiske formler hvis  $v(A) = \mathbf{1}$  for alle  $A$  i  $S$ . Dette skrives ofte  $v \models S$ .
- En mengde utsagnslogisk formler er **oppfyllebar** (eng: *satisfiable*) hvis det fins en valuasjon som oppfyller den.

### Eksempel

- Mengden  $\{\neg P, Q\}$  er oppfyllebar; den oppfylles av enhver valuasjon  $v$  slik at  $v(P) = \mathbf{0}$  eller  $v(Q) = \mathbf{1}$ .
- Mengden  $\{P, \neg P\}$  er *ikke* oppfyllebar; det fins ingen valusjon  $v$  slik at både  $v(P) = \mathbf{1}$  og  $v(\neg P) = \mathbf{1}$ .