Løsningsforslag til obligatorisk oppgave 1
INF1800 Logikk og beregnbarhet, høsten 2009

Torgeir Lebesbye
Universitetet i Oslo
torgeirl@ifi.uio.no

30. september 2009

Oppgave 1 (Mengdelære)

a. Hvor mange binære relasjoner har en over A?

Vi har definert at en binær relasjon fra S til T er en delmengde av kryssproduktet SxT. Kryssproduktet AxA har ni elementer, {1,2,3} x {1,2,3} = {(1,1)(1,2)(1,3)(2,1)(2,2)(2,3)(3,1)(3,2)(3,3)}, og disse har igjen $|\text{P(A)}|^2 = 2^{|A|^2} = 2^{3^2} = 2^9 = 512$ delmengder.

b. Hvor mange - og hvilke - av disse er funksjoner?

Vi vet at en funksjon ikke kan sende et element i definisjonsområdet til to forskjellige elementer i verdiområdet. Definisjonsområdet har her tre elementer og vi har dermed $3^3 = 27$ funksjoner på formen $f = \{(1,x)(2,y)(3,z) \mid x, y, z \in A\}$.

f_1: {(1, 1), (2, 1), (3, 1)}

f_2: {(1, 1), (2, 1), (3, 2)}

f_2: {(1, 1), (2, 1), (3, 3)}

...

f_{10}: {(1, 2), (2, 1), (3, 1)}

...

f_{27}: {(1, 3), (2, 3), (3, 3)}

c. Hvor mange - og hvilke - av disse er ekvivalensrelasjoner?

A har fem ekvivalensklasser ('partisjoneringer'). Disse er ekvivalensrelasjoner siden enhver ekvivalensklasse på A er et delmengde av A, og holder dermed kvavene om refleksivitet, symmetri og transitivitet.

{(1,1)(2,2)(3,3)} - {1}{2}{3}

{(1,1)(2,2)(3,3)(2,3)(3,2)} - {1}{2,3}

{(1,1)(2,2)(3,3)(1,3)(3,1)} - {2}{1,3}

{(1,1)(2,2)(3,3)(1,2)(2,1)} - {3}{1,2}

{(1,1)(2,2)(3,3)(2,3)(3,2)(1,3)(3,1)(1,2)(2,1)} - {1,2,3}

d. Hvor mange - og hvilke - av disse er totalt ordnet?

En total ordning er transitiv, anti-symmetrisk og total ('lenket'). En total ordning er det samme som en en sortering av elementene, og siden det finnes n! permutasjoner av n elementer har vi her 3! = 6 totale ordninger av A.

{(1,2)(2,3)(1,3)} - 1, 2, 3

{(1,3)(3,2)(1,2)} - 1, 3, 2

{(2,1)(1,3)(2,3)} - 2, 1, 3

{(2,3)(3,1)(2,1)} - 2, 3, 1

{(3,1)(1,2)(3,2)} - 3, 1, 2

{(3,2)(2,1)(3,1)} - 3, 2, 1

MERK: Noen definisjoner av totalitet kan ha refleksivitet som et krav. I dette kurset og i læreboken har vi derimot irrefleksivitet.

Oppgave 2 (Utsagnslogikk)

a. Hva betyr det at {¬,∧} er en fullstendig mengde konnektiver? Vis at det er tilfelle.

En fullstendig mengde konnektiver vil si at man kan si all utsagnslogikk ved hjelp av disse konnektivene. For å bevise dette må jeg vise at man kan skrive de to andre konnektivene ved hjelp av $\neg$ og $\wedge$. Vi har definert at to formeler er ekvivalente hvis og bare hvis de har samme sannhetsverdi for enhver tilordning av sannhetsverdier til utsagnvariable, og jeg kan dermed bevise at omskrivningene er ekvivalene med hva jeg skal erstatte ved hjelp av sannhetstabeller.

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \lor B$	1	1	1	0
$\neg(\neg A \land \neg B)$	1	1	1	0
$A \rightarrow B$	1	0	1	1
$\neg(A \land \neg B)$	1	0	1	1

Vi ser at tredje og fjerde samt femte og sjette tabellrekke er identiske, og vi har dermed bevist at $\{\neg,\land\}$ er en fullstendig mengde konnektiver.

b. Hvilke av $\{\land,\lor\}$, $\{\neg,\lor\}$ og {false,$\rightarrow$} er fullstendig mengde av konnektiver?

Det er intuitivt at disjunksjon og konjunksjon ikke er en fullstendig mengde konnektiver da vi må ha en måte å gjengi negasjon på, og med kun $\land$ og $\lor$ har vi feks ikke noen måte å si $\neg A$.

Negasjon og disjunksjon er fullstendig av samme grunner som 2a er fullstendig, bare å bytte ut konjunksjon med disjunksjon i det opprinnelige beviset (pga. De Morgans lover).

Usannskonstanten og implikasjon er fullstendig fordi konjunksjon kan skrives om til disjunksjon vha. De Morgan, disjunksjon kan skrives om til implikasjon vha. ekvivalensen $\neg A \lor B \equiv A \rightarrow B$, og negasjon kan fjernes vha. ekvivalensen $\neg A \equiv A \rightarrow \text{false}$.

c. Konnektivene $A|B$ og $A{\downarrow}B$ er begge fullstendig mengde av konnektiver alene. Vis dette.

Som vi ser av sannhetstabellen kan vi skrive konjuksjon og negasjon med $|$, og disjunksjon og negasjon med $\downarrow$. Som bevist i henholdsvis 2a og 2b er dette to fullstendige mengder konnektiver, og dermed vil også $|$ og $\downarrow$ hver for seg være fullstendige mengder konnektiver.

A	1	1	0	0
B	1	0	1	0
$A \land B$	1	0	0	0
$(A\|B)\|(A\|B)$	1	0	0	0
$A \lor B$	1	1	1	0
$(A{\downarrow}B){\downarrow}(A{\downarrow}B)$	1	1	1	0
$\neg A$	0	0	1	1
$A\|A$	0	0	1	1
$A{\downarrow}A$	0	0	1	1

d. Gi et forslag til norsk (eventuelt engelsk) oversettelse av konnektivene i c.

A|B - neither A or B (NOR), A↓B - not (both) A and B (NAND).

Oppgave 3 (Falsifikasjon i utsagnslogikk)

a. A er gyldig hvis og bare hvis A lar seg ikke falsifisere.

Vi har definert at en påstand er gyldig (en tautologi) hvis den ikke lar seg falsifisere for noen valuasjon v. En påstand er derimot falsifiserbar hvis den for en valuasjon v lar seg falsifiserer. Dermed blir det at A lar seg falsifisere en negasjon av at A er gyldig (¬(¬G)). Sannhetstabellen beviser den utsagnslogiske påstanden a.

G	¬(¬G)	G ↔ ¬(¬G)
1	1	1
0	0	1

b. A∨B lar seg falsifisere hvis og bare hvis både A og B lar seg samtidig falsifisere

Vi ser av sannhetstabellen at kun v(A) = 0 og v(B) = 0 kan falsifisere A∨B.

A	B	A∨B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

c. A∧B lar seg falsifisere hvis og bare hvis A eller B lar seg falsifisere

Vi ser av sannhetstabellen at v(A) = 0 eller v(B) = 0 kan falsifisere A∧B.

A	B	A∧B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0