INF 3/4130

Algoritmer: Design og effektivitet

Velkommen

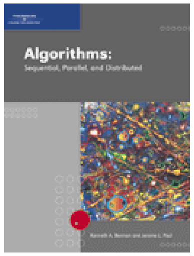
- **Forelesere:**

  Dino Karabeg, `dino@ifi.uio.no`
  Stein Krogdahl, `steinkr@ifi.uio.no`
  Petter Kristiansen `pettkr@ifi.uio.no`

- **Lærebok:**

  Algorithms: Sequential, Parallel, and Distributed,
  Kenneth A. Berman and Jerome L. Paul.
  Til salgs i bokhandelen.

  (Sørg for å få boka med copyright 2005.)



Velkommen

- **Gruppelærer:**

  Kristoffer Skaret
  `kristska@student.matnat.uio.no`

- **Obliger:**

  Tre stykker, som må godkjennes.

- **Andre, "nærliggende" kurs:**

  INF-MAT 3/4370 Lineær optimering
  INF-MAT 5360 Matematisk optimering
  INF 5340 Algoritmer i bioinformatikk

Kvalitetssikring ved Ifi

- Som student har du rett og plikt til å bidra til kvalitetssikringen av studiet ditt. Dette gjør du først og fremst gjennom å delta i undervisningsevaluering. Faglærer vil ta initiativ til å sette i gang undervisningsevalueringen for hvert enkelt emne.
- Undervisningsevalueringen gir deg mulighet til å komme med tilbakemeldinger og innspill på undervisningen i løpet av semesteret, slik at forbedringer kan gjøres underveis.
- Du finner mer informasjon om dette på hovedsiden til Institutt for informatikk, under "Annet" – "Kvalitetssikring", eller ved å følge denne linken: *http://www.ifi.uio.no/studinf/kvalitetssikring/studenter.*

Undervisningsplan

31/08	pk	Søking i strenger (kap. 20)
07/09	pk	Dynamisk programmering (kap. 9)
14/09	sk	Flyt i grafer. Matchinger i bipartite grafer (kap. 14)
21/09	sk	Mest om matchinger i generelle grafer (kap. 14 + notat)
28/09		
05/10		
12/10		Undervisningsfri uke

Søking i strenger

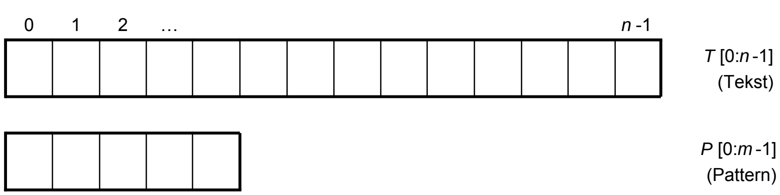
- Vanlige søkealgoritmer
  - Prefiks-søking — Naiv algoritme; Knuth-Morris-Pratt-algoritmen
  - Suffiks-søking — Boyer-Moore-algoritmen
  - Hash-basert — Karp-Rabin-algoritmen
- Indeksering av tekst
  - Datastrukturer — Trie-trær; Suffiks-trær

Definisjoner

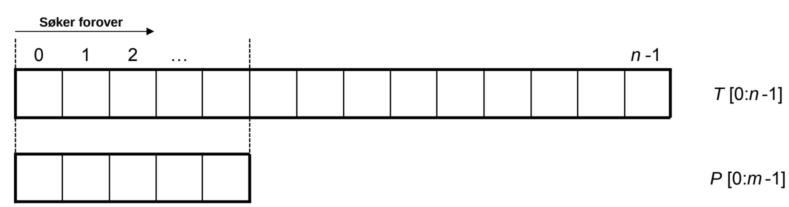
Et **alfabet** er en mengde symboler $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

En **streng** $S = S[0{:}n\text{-}1]$ av lengde n er en sekvens av symboler fra *A.*

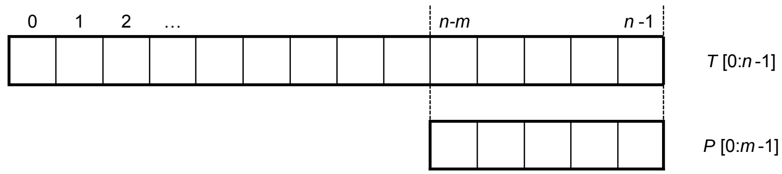
(Vi kan se på strengen S både som et array $S[0{:}n\text{-}1]$ og som en sekvens av symboler $S = s_1 s_2 \ldots s_{n\text{-}1}$.)



Naiv algoritme



Naiv algoritme




```
function NaiveStringMatcher (P [0:m -1], T [0:n -1])
    for s ← 0 to n - m do
        if T [s :s + m -1] = P  then
            return(s)
        endif
    endfor
    return(-1)
end NaiveStringMatcher
```

for-løkka eksekveres $n - m + 1$ ganger.
Hver sjekk inntil m symbolsammenlikninger.

$O(nm)$ kjøretid (worst case)

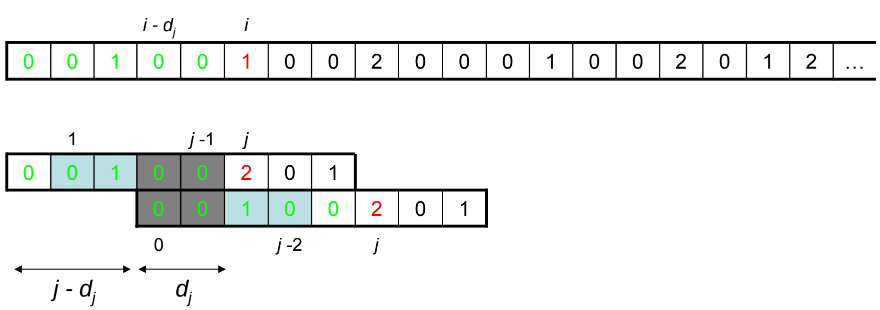
Knuth-Morris-Pratt-algoritmen

Det er, algoritmisk sett, rom for forbedringer av den naive algoritmen.
Den flytter patternet bare ett hakk i hvert steg.
Kan vi kanskje flytte patternet mer enn bare ett steg?

0	0	1	0	0	1	0	0	2	0	0	0	1	0	0	2	0	1	2	…

0	0	1	0	0	2	0	1

Knuth-Morris-Pratt-algoritmen



d_j er lengden av
lengste prefix av P [0 : j - 2] som også er suffix av P [1 : j -1]

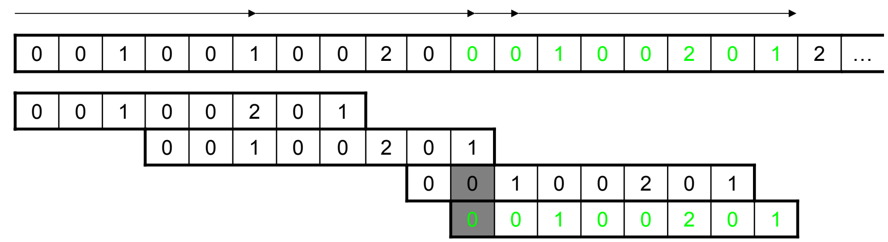
Vi vet nå at vi kan flytte P maksimalt j - d_j steg.
Og vi vet at P [0 : d_j -1] matcher T, så vi kan starte å sammenlikne med P [d_j : m-1].


```
function KMPStringMatcher (P [0:m -1], T [0:n -1])
    i ← 0
    j ← 0
    CreateNext(P [0:m -1], Next [n -1])
    while i < n do
        if P [ j ] = T [ i ] then
            if j = m –1 then
                return(i – m + 1)
            endif
            i ← i + 1
            j ← j + 1
        else
            j ← Next [ j ]
            if j = 0 then
                if T [ i ] ≠ P [0] then
                    i ← i + 1
                endif
            endif
        endif
    endwhile
    return(-1)
end KMPStringMatcher
```

$O(2n)$

```
function CreateNext (P [0:m -1], Next [0:m -1])
    Next [ 0 ] ← Next [ 1 ] ← 0
    i ← 2
    j ← 0
    while i < m do
        if P [ j ] = P [ i - 1 ] then
            Next [ i ] ← j + 1
            i ← i + 1
            j ← j + 1
        else
            if j > 0 then
                j ← Next [ j ]                (Trykkfeil i boka)
            else
                Next [ i ] ← 0
                i ← i + 1
            endif
        endif
    endwhile
end CreateNext
```

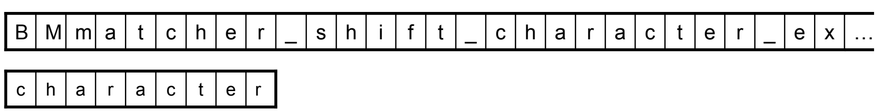
Knuth-Morris-Pratt-algoritmen



Lineær algoritme, $O(n)$ kjøretid worst case.

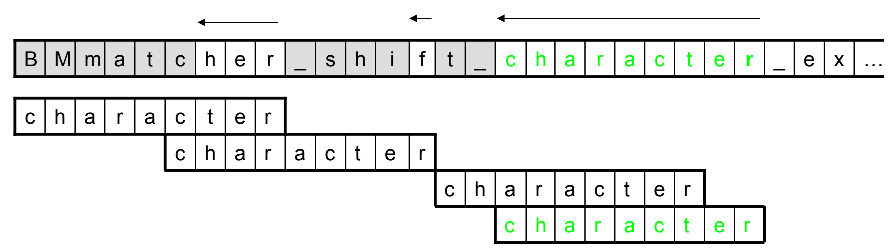
Boyer-Moore-algoritmen (Horspool)

Den naive algoritmen, og Knuth-Morris-Pratt er prefiksbaserte (fra venstre mot høyre).
Boyer-Moore-algoritmen (og varianter) er suffiksbasert (fra høyre mot venstre).



Boyer-Moore-algoritmen (Horspool)

Den naive algoritmen, og Knuth-Morris-Pratt er prefiksbaserte (fra venstre mot høyre).
Boyer-Moore-algoritmen (og varianter) er suffixbasert (fra høyre mot venstre).



$O(mn)$ kjøretid worst case (som den naive algoritmen).
Sub-lineær ($\leq n$) i gjennomsnitt $O(n \log_{|A|} m / m)$.

```
function HorspoolStringMatcher (P [0:m -1], T [0:n -1])
    i ← 0
    CreateShift(P [0:m -1], Shift [|A| - 1])
    while i < n – m do
        j ← m – 1
        while j ≥ 0 and T [ i + j ] = P [ j ] do
            j ← j -1
        endwhile
        if j = 0 then
            return( i )
        endif
        i ← i + Shift[ T[ i + m -1] ]
    endwhile
    return(-1)
end HorspoolStringMatcher
```

Karp-Rabin-algoritmen

- Vi antar at strengene våre kommer fra et k-ært alfabet $A = \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$.
- Hvert symbol i A kan sees på som et siffer i k-tallssystemet.
- Hver streng S i A^* kan sees på som tall S' i k-tallssystemet.

Eks:

$k = 10$, og $A = \{0,1, 2, \ldots, 9\}$ (Det vanlige 10-tallssystemet)

Strengen ”6832355” kan sees på som tallet 6 832 355.

- Gitt en streng $P\,[0:m-1]$, kan vi beregne det korresponderende tallet med m multiplikasjoner og m addisjoner (Horners regel):

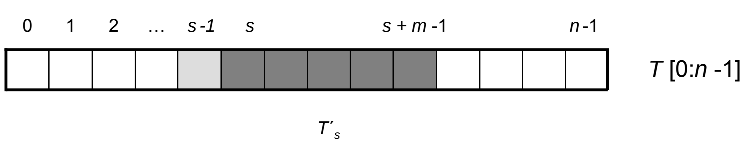
$$P' = P\,[m-1] + k(P\,[m-1] + k(P\,[m-2] + \ldots + k(P\,[1] + kP\,[0])\ldots))$$

Eks:

$1234 = 4 + 10(3 + 10(2 + 10*1))$

Karp-Rabin-algoritmen

- Gitt en tekststreng $T\,[0:n-1]$, og et heltall s (start-index), bruker vi T_s som betegnelse på delstrengen $T\,[s: s+m-1]$. (Vi antar at patternet vårt har lengde m.)
- En algoritme basert på Horners regel beregner $T'_0, T'_1, T'_2, \ldots$ og sammenlikner disse tallene med tallet P' for patternet P. (Tilsvarende den naive algoritmen.)
- Gitt T'_{s-1} og k^{m-1}, kan vi regne ut T'_s i konstant tid. **!**



Karp-Rabin-algoritmen

Grunnen til at vi kan beregne T'_s i konstant tid når vi har T'_{s-1} og k^{m-1}, er følgende rekurrensrelasjon:

$$T'_s = k(T'_{s-1} - k^{m-1} * T\,[s]) + T\,[s+m] \qquad s = 1, \ldots, n-m$$

Konstant, beregnes *en* gang, kan gjøres i tid $O(\log m)$

Eks:

$k = 10$, $A = \{0,1, 2, \ldots, 9\}$ (Det vanlige 10-tallssystemet) og $m = 7$.

$T'_{s-1} = 7937245$

$T'_s = 9372458$

$$T'_s = 10(7937245 - (1000000 * 7)) + 8$$

Kan gjøres i konstant tid. Bare multiplikasjon og addisjon, vi antar disse operasjonene kan gjøres i konstant tid.

Karp-Rabin-algoritmen

- Kan beregne T'_s i konstant tid når vi har T'_{s-1} og k^{m-1}.
- Altså kan vi beregne de $n - m + 1$ tallene T'_s, $s = 0, 1, \ldots, n - m$ og P' i tid $O(n)$.
- Vi kan altså, i teorien, implementere en søkealgoritme med kjøretid $O(n)$.
- Dessverre vil tallene T'_s og P' i praksis være for store til at algoritmen blir praktisk anvendbar.
- Trikset er å bruke modulo-aritmetikk. Vi gjør alle beregninger modulo q (q et tilfeldig valgt primtall, slik at kq akkurat passer i et 32/64 bits register).

Karp-Rabin-algoritmen

- Vi beregner $T'^{(q)}_s$ og $P'^{(q)}$, hvor

$$\left.\begin{aligned} T'^{(q)}_s &= T'_s \bmod q, \\ P'^{(q)} &= P' \bmod q, \end{aligned}\right\} \text{Resten i divisjonen, når vi deler på } q\text{: et tall i intervallet } \{0, 1, \ldots, q-1\}.$$

  og sammenlikner.
- Vi kan ha $T'^{(q)}_s = P'^{(q)}$, selv om $T'_s \neq P'$, en såkalt *spuriøs match*.
- Har vi $T'^{(q)}_s = P'^{(q)}$, må vi altså gjøre en nøyaktig sjekk av T_s og P.
- Med stor nok q, er sannsynligheten for spuriøse matcher lav.


```
function KarpRabinStringMatcher (P [0:m -1], T [0:n -1], k, q)
    c ← k^(m-1) mod q
    P′(q) ← 0
    T′(q)_s ← 0

    for i ← 1 to m do
        P′(q) ← (k * P′(q) + P [ i ]) mod q
        T′(q)_0 ← (k * T′(q)_0 + T [ i ]) mod q
    endfor

    for s ← 0 to n - m do
        if s > 0 then
            T′(q)_s ← (k * ( T′(q)_s-1 - T [ s ] * c) + T [ s + m ]) mod q
        endif
        if T′(q)_s = P′(q) then
            if T_s = P then
                return(s)
            endif
        endif
    endfor
    return(-1)
    end KarpRabinStringMatcher
```

Karp-Rabin-algoritmen

- Worst case-kjøretid for Karp-Rabin-algoritmen får vi når patternet P finnes helt i slutten av strengen T.
- Sannsynligheten for at $T'^{(q)}_s$ antar en spesifikk verdi i intervallet $\{0, 1, \ldots, q-1\}$ er uniform $1/q$. (Vi antar strengene er uniformt fordelte.)
- $T'^{(q)}_s$, $s = 0, 1, \ldots, n-m-1$ vil altså gi opphav til en spuriøs match med sannsynlighet $1/q$.
- La r være det forventede antall spuriøse matcher. Hver av disse innebærer (worst case) m sammenlikninger. I tillegg må vi sjekke $T'^{(q)}_{n-m}$, hvor vi får match.
- Kjøretiden blir altså: $(r + 1)m + (n - m + 1)$

Karp-Rabin-algoritmen

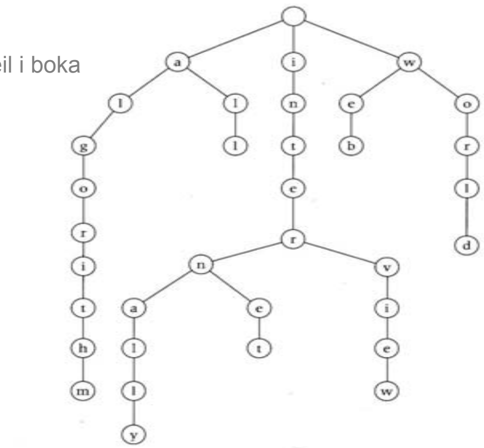
- *r* er en binomialfordelt stokastisk variabel. (Hver skift er et ”forsøk”, med suksessansynlighet 1/*q*, og vi gjør *n-m* forsøk) [Nå anser vi spuriøse matcher som ”suksess”…]
- E[*r*] = (*n-m*)/*q.* (Forventning av binomialfordelt variabel.)
- Totalt får vi altså $\left(\frac{n-m}{q}+1\right)m+(n-m+1)$

Forventet kjøretid når matchen finnes helt til slutt i *T.*

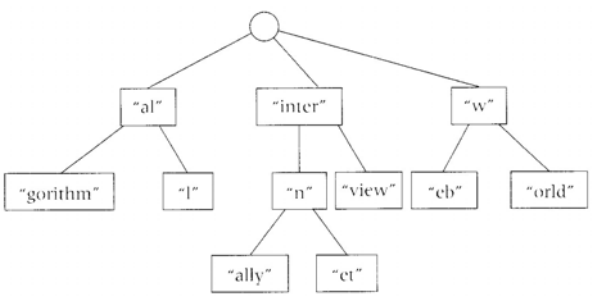
- Hvis *q* < *C*, hvor *C* er en konstant, blir kjøretiden *O*(*nm*).
- MEN det er rimelig å anta *q* >> *m, da blir kjøretiden O*(*n*)

Trie-trær

Trykkfeil i boka

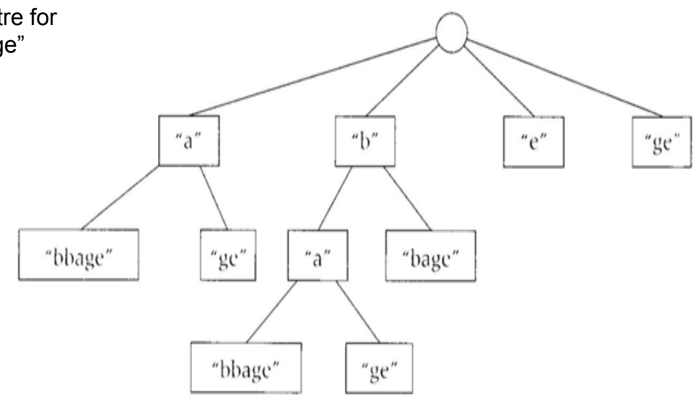


Trie-trær

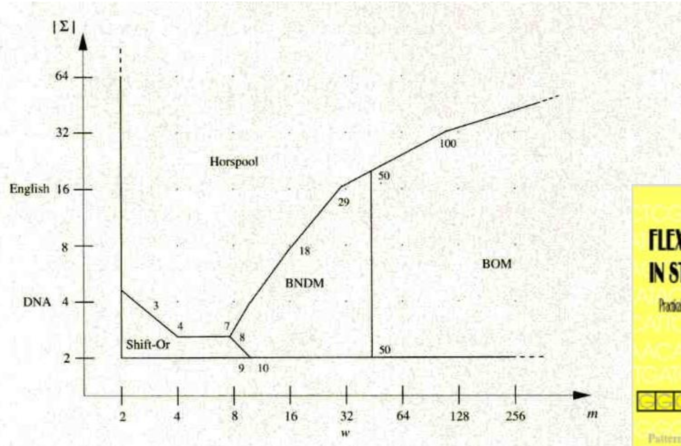


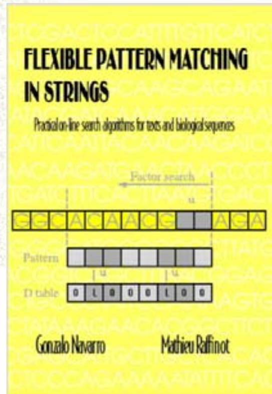
Suffix-trær

Suffix –tre for ”babbage”



Div.


|Σ|
64
32
English 16
8
DNA 4
2
Horspool
BNDM
BOM
Shift-Or
3
4
7
8
9
10
18
29
50
100
50
2
4
8
16
32
64
128
256
m
w


FLEXIBLE PATTERN MATCHING IN STRINGS
Practical on-line search algorithms for texts and biological sequences
Gonzalo Navarro
Mathieu Raffinot