Søk i tilstandsrom

- *Backtracking* (Kap. 10)
  - DFS i tilstandsrommet.
  - Trenger lite lagerplass.
- *Branch-and-bound* (Kap. 10)
  - BFS
  - Trenger mye plass: må lagre alle noder som er «sett» men ikke studert.
  - Kan også gi hver node en «lovende-het», og så gå videre med den som er mest lovende (heuristikk), bruker prioritetskø, likner på Dijkstras algoritme.
- Iterativ fordypning
  - DFS ned til nivå 1, så til nivå 2, osv.
  - Kombinerer plasseffektiviteten til dybde først og komplettheten til bredde først.
- Dijkstras korteste sti-algoritme
- A*-søk (Kap. 23)
  - Likner mye på branch-and-bound med prioritetskø.

Tilstandsrom og avgjørelsessekvenser

- Et *tilstandsrom* er mengden av alle mulige tilstander det vi studerer (problemet) kan befinne seg i – *problem states*.

- Noen tilstander er lovlige løsninger eller måltilstander – *goal states*.

Søkealgoritmene vi skal se på trenger litt struktur på dette tilstandsrommet for å virke. Algoritmene anvendes på problemer hvor løsningen kan sees på som en serie av avgjørelser som taes.

- Det er mange måter å modellere avgjørelsessekvenser for et gitt problem. Disse fører til forskjellige tilstandsromstrær (*state space trees*).

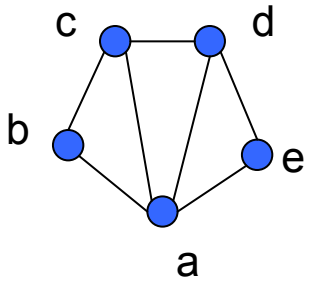
Både backtracking og branch-and-bound baserer seg på søk i disse tilstands-romstrærne.

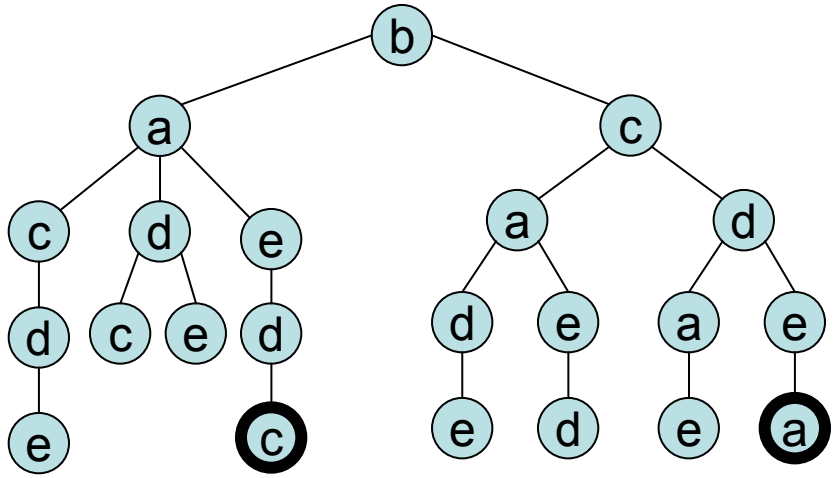
- Uheldigvis kan tilstandsromstrærne bli store. (Eksponensielt store i forhold til lengen av input.)

Tilstandsrom og avgjørelsessekvenser

Eksempel: Hamiltonsk sykel

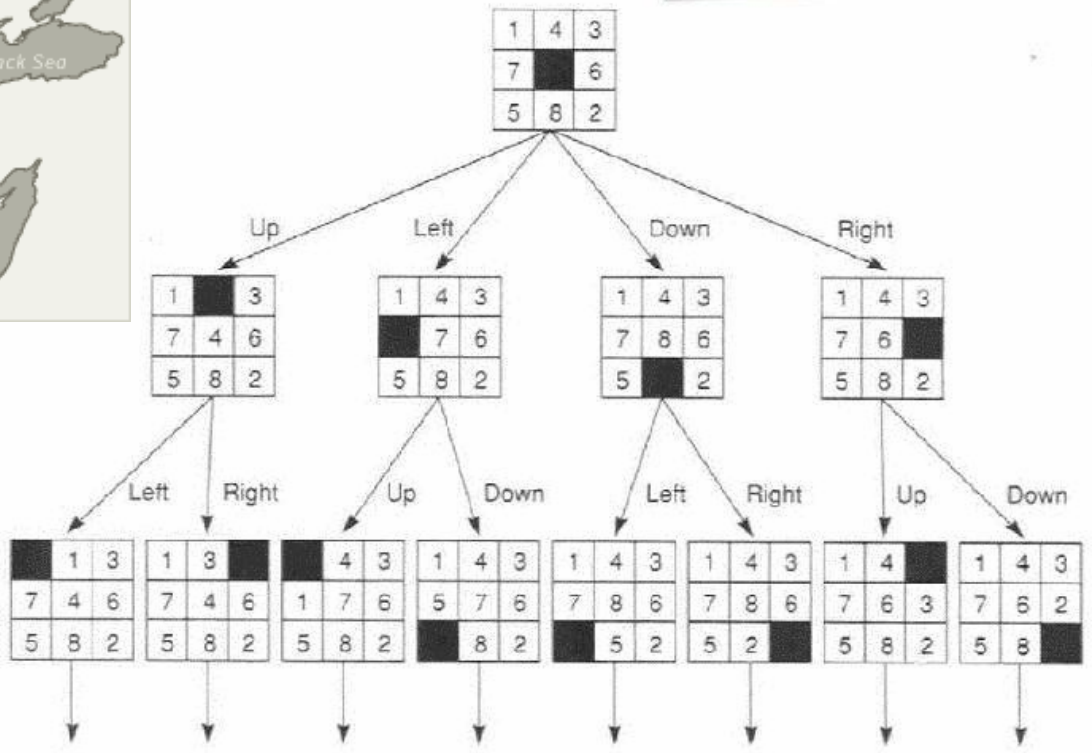
1. Start sykelen i tilfeldig valgt node og gå videre på alle mulige måter.
   - Mulige valg i steget i algoritmen: alle kanter ut fra siste valgte node som ikke går tilbake til allerede valgte node.
2. Start med en kant og legg stadig til en kant til.
   - Mulige valg i steget i algoritmen: alle ikke-valgte kanter som gjør at alle de sammenhengende komponentene av valgte kanter fremdeles forblir enkle veier.





Tilstandsromstre for modell 1 over.

Tilstandsrom og avgjørelsesel



Backtracking / DFS

- Gjennomsøker tilstandsroms-treet dybde-først, til vi kommer til en måltilstand.
- Bruker greiest en rekursiv prosedyre, som har selve problemstillingen som globale data.
- Tar liten plass.
- Kan bruke heuristikker til å velge mest lovende vei ut av den noden vi nå står i (f.eks. korteste kant først, om man vil finne korteste Ham. Cycle).
- Må bruke avskjæring så godt som mulig (*pruning*, *bounding*): Ikke gå ned i subtrær som umulig kan inneholde en måltilstand.

DFS

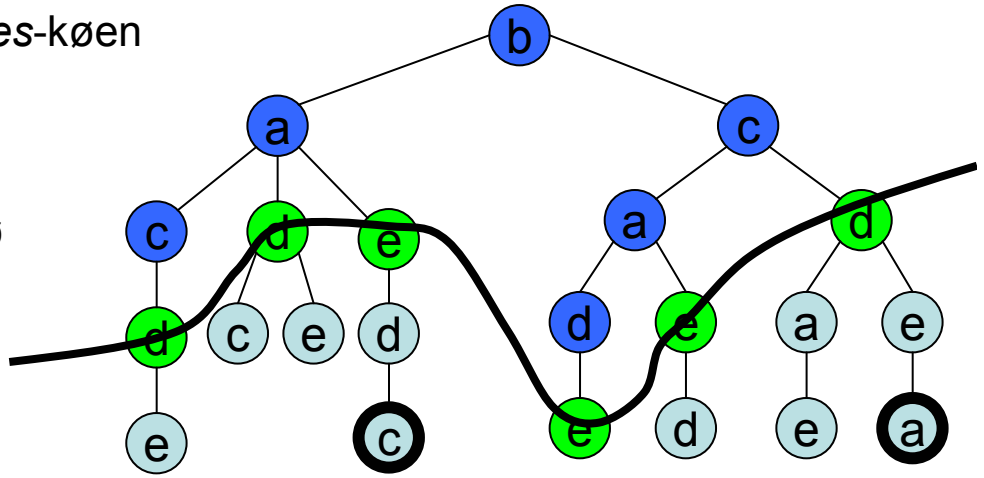
Malen for et dybde først-søk ser slik ut (rekursivt):

```
proc DFS(v)
{
        v.visited=TRUE
        for <hver nabo w av v> do
                if not w.visited then DFS(w)
        od
}
```

Dette er en meget anvendelig teknikk.

Branch-and-bound

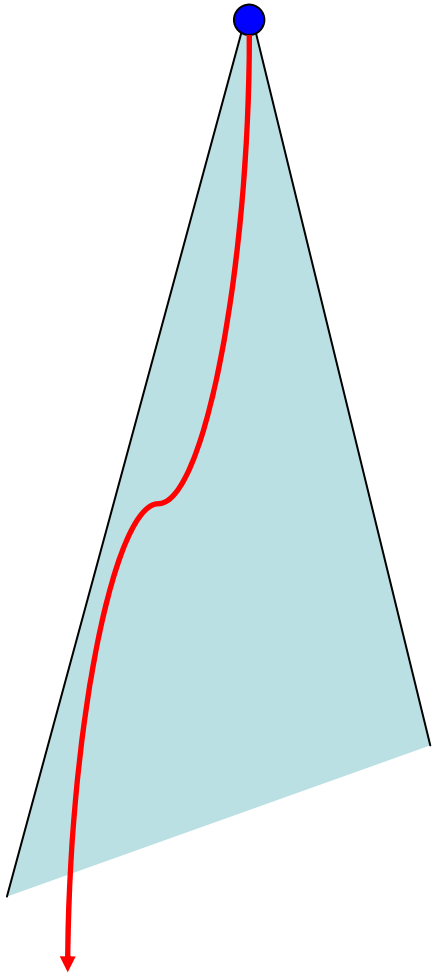
- Bruker en eller annen form for bredde-først-søk.
- Blir en mengde av noder som boka kaller *LiveNodes*
  - Dette er de som er «sett, men ikke fulgt opp». **NB: Kan bli stor!**
- *Live nodes* vil være et snitt gjennom tilstandsrom-treet (grønne under)
- Steget: Velg en node *N* fra mengden *LiveNodes*
  - Er *N* en mål-node, er vi ferdig,
  - Hvis *N* ikke er målnode
    - Ta *N* ut av *LiveNodes*-køen
    - Sett alle *N*s barn inn i *LiveNodes*-køen



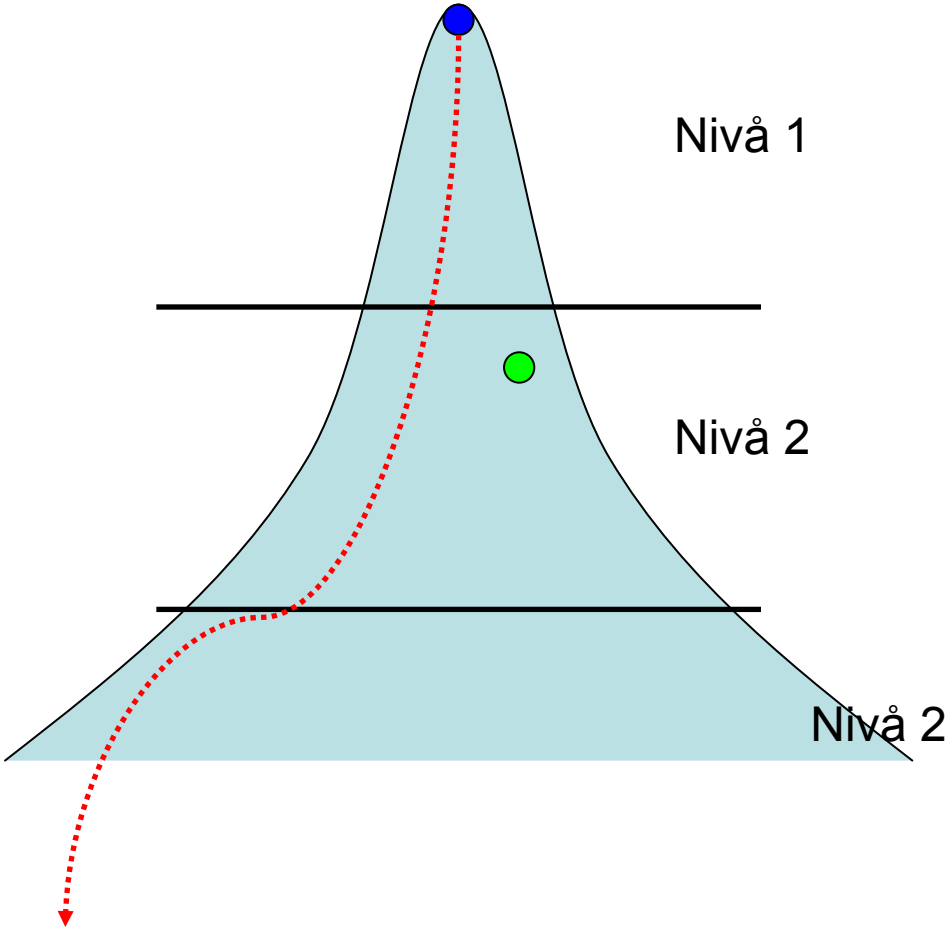
- Tre strategier:
  - *LiveNodes*-mengden er en FIFO-kø
    - Ekte bredde først
  - *LiveNodes*-mengden er en LIFO-kø
    - Likner på dybde-først
  - *LiveNodes*-mengden er prioriteskø,
    - med en passelig heuristikk som prioritet
    - Likner mye på A*-søk (kommer)

Iterativ fordypning

Ulempen med dybde først er at man kan «gå seg bort» i en håpløs gren.



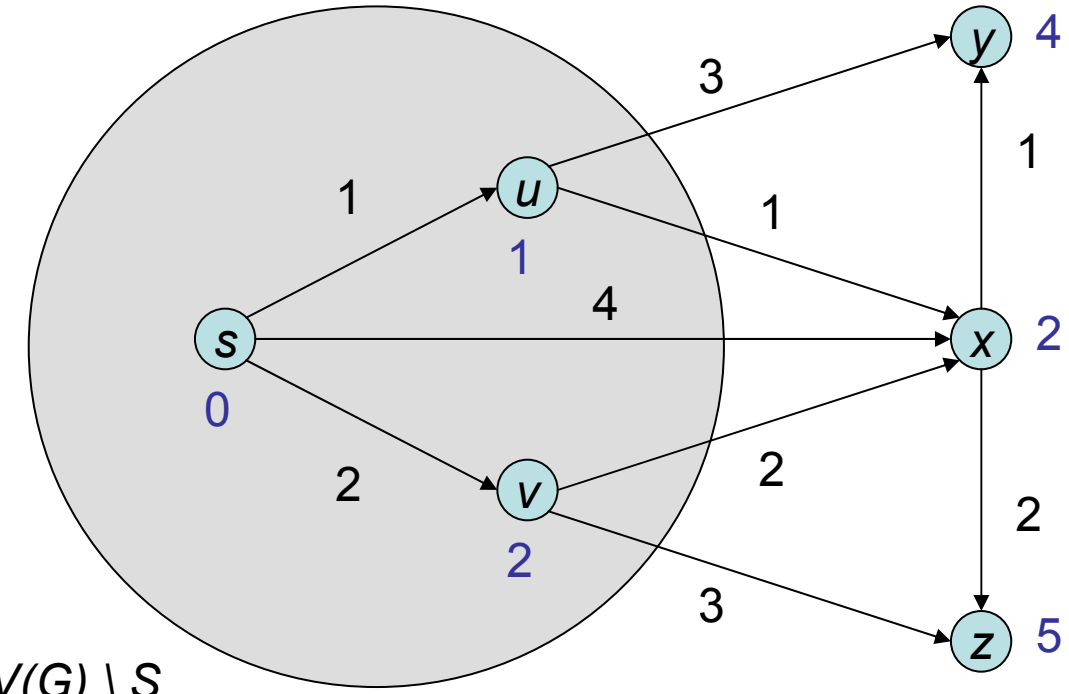
Unngår dette med iterativ fordypning, på bekostning av litt ekstraarbeid.



Dijkstras algoritme

```
proc Dijkstra(Graph G, Node source)
for each vertex v in Graph do          // Initialisering
    v.dist := ∞                        // Ukjent avstand initielt mellom v og source
    v.previous := NIL                  // Peker for å huske stien
od
source.dist := 0                       // Avstand fra source til seg selv
S := V(G)                              // Mengden av ubesøkte noder, initielt alle
while S is not empty do
   u := extract_min(S)                 // Nærmeste node fra prioritetskø, source første
   for each neighbor v of u do         // gang. Key i køen er dist-verdien
      v.alt = u.dist + length(u, v)
      if v.alt < v.dist then           // «Relax» (u,v)
         v.dist := v.alt
         v.previous := u
      fi
```

Dijkstras algoritme



V(G) \ S

mengden av besøkte noder

A*-søk (Hart, Nilsson, Raphael 1968)

- Backtracking / dybde først, LIFO / FIFO *branch-and-bound*, bredde først og Dijkstra bruker bare lokal informasjon når man velger, og ekspanderer, en node. Man ser alltid bare på en node og dens naboer.

- A*-søk er en type heuristisk søk som forsøker å se lengre enn bare til en nodes umiddelbare naboer.

- Mye brukt innen AI og kunnskapsbaserte systemer, og i dataspill.

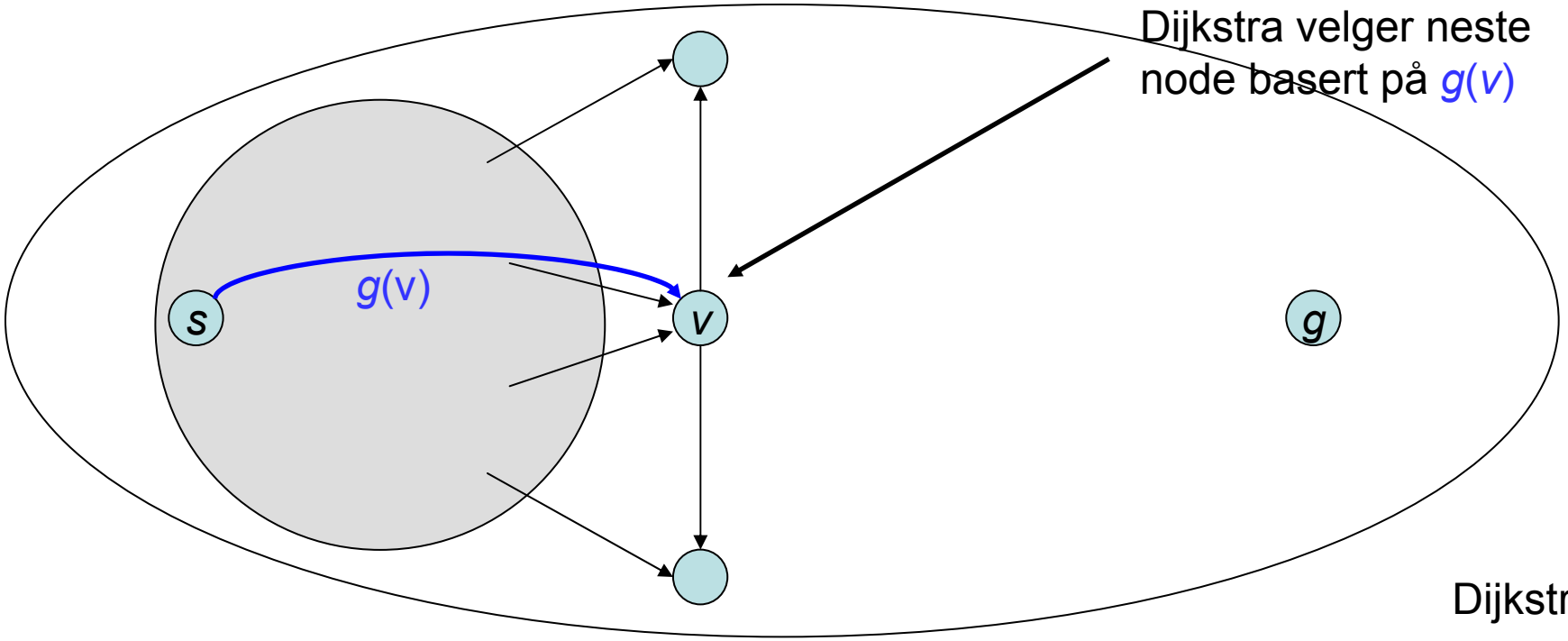
- A*-søk er egnet i problemer hvor vi har
  - en (eksplisitt eller implisitt) tilstandsgraf,
  - med en start-tilstand, og et antall mål-tilstander, hvor
  - mulige tilstands-overganger er rettede kanter med en gitt kost,

  og hvor vi skal finne en vei fra start til en måltilstand, med minimal kost.

Altså logisk sett: korteste-vei-problemet

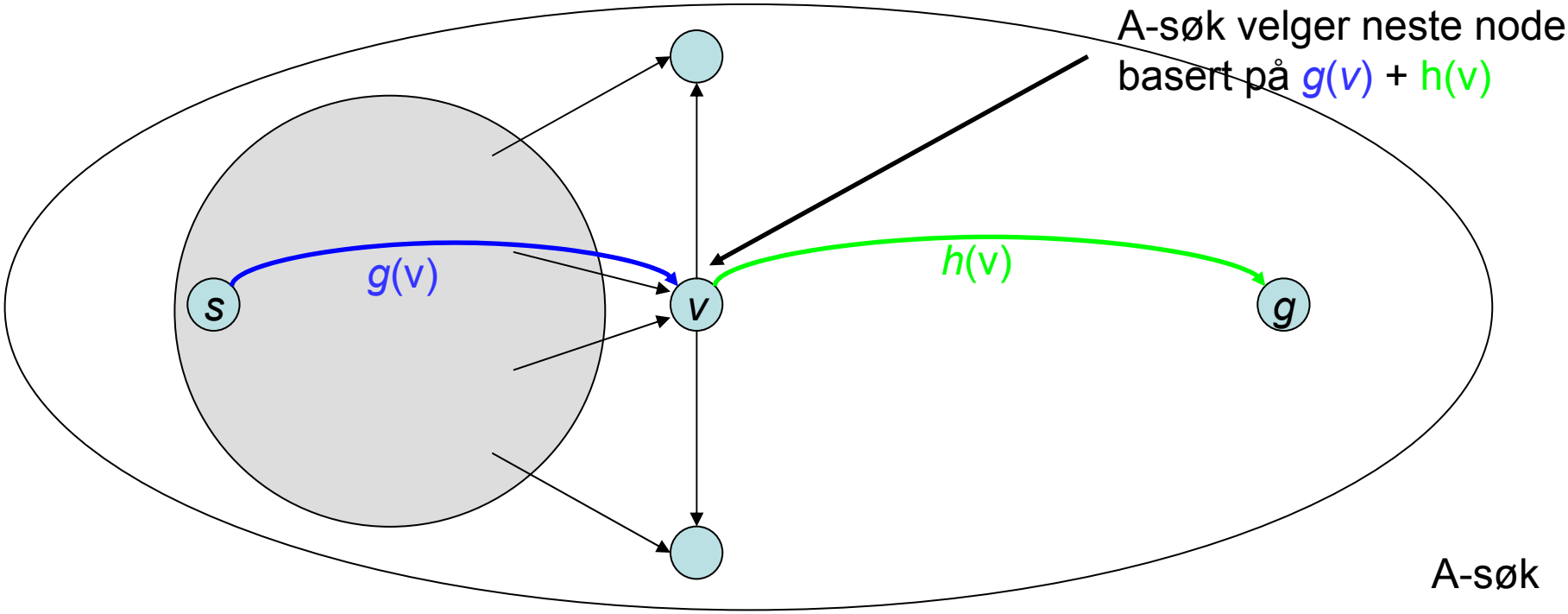
A*-søk – heuristikk

- Strategien er et bredde-først-søk
  - Vi bruker en heuristikk-funksjon *h(v)* for stadig å velge mest lovende vei. Det er denne som hjelper oss å «se» lengre enn et lokalt nabolag.
  - Altså bredde-først-søk med en prioriteskø for valg av neste fra *LiveNodes.*
- Minner derved mye om Dijkstras korteste sti-algoritme. (Dijkstra er faktisk et spesialtilfelle av A*-søk.)



A*-søk – heuristikk

- Strategien er et bredde-først-søk
  - Vi bruker en heuristikk-funksjon *h(v)* for stadig å velge mest lovende vei. Det er denne som hjelper oss å «se» lengre enn et lokalt nabolag.
  - Altså bredde-først-søk med en prioriteskø for valg av neste fra *LiveNodes.*
- Minner derved mye om Dijkstras korteste sti-algoritme. (Dijkstra er faktisk et spesialtilfelle av A*-søk.)



A*-søk – heuristikk

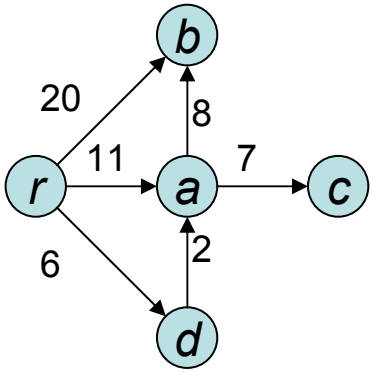
Heuristikk-funksjonen $h(v)$ skal være et estimat på hvor langt det er fra v til nærmeste mål-tilstand.

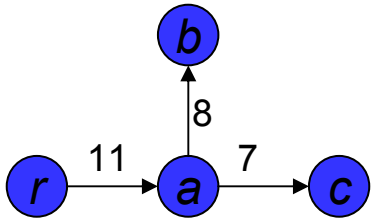
- For at algoritmen skal kalles et A*-søk forlanger vi at $h(v)$ skal aldri være større enn den faktisk korteste vei til nærmeste mål. Altså et underestimat – et optimistisk estimat.

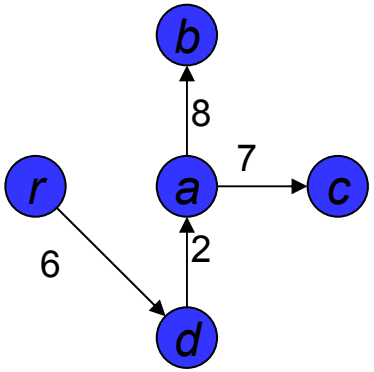
- I tillegg kreves gjerne en slags trekant-ulikhet for $h(v)$. Det gjør algoritmen mye raskere. Vi slipper oppdatering av noder vi allerede har behandlet, og som ligger i spenntreet.

A*-søk – heuristikk

- Dersom *h(v)* aldri er større enn faktisk korteste vei fra v til nærmeste mål,
  - og vi bruker en Dijkstra-liknende algoritme, med passelig bruk av *h*(*v*),
  - da vil vi alltid til slutt få riktig resultat (korteste vei fra start til nærmeste mål).
- Men vi må stadig gå tilbake til noder ”vi trodde vi var ferdig med”
  - og oppdatere lengden, og dermed få mye ekstra-arbeid!







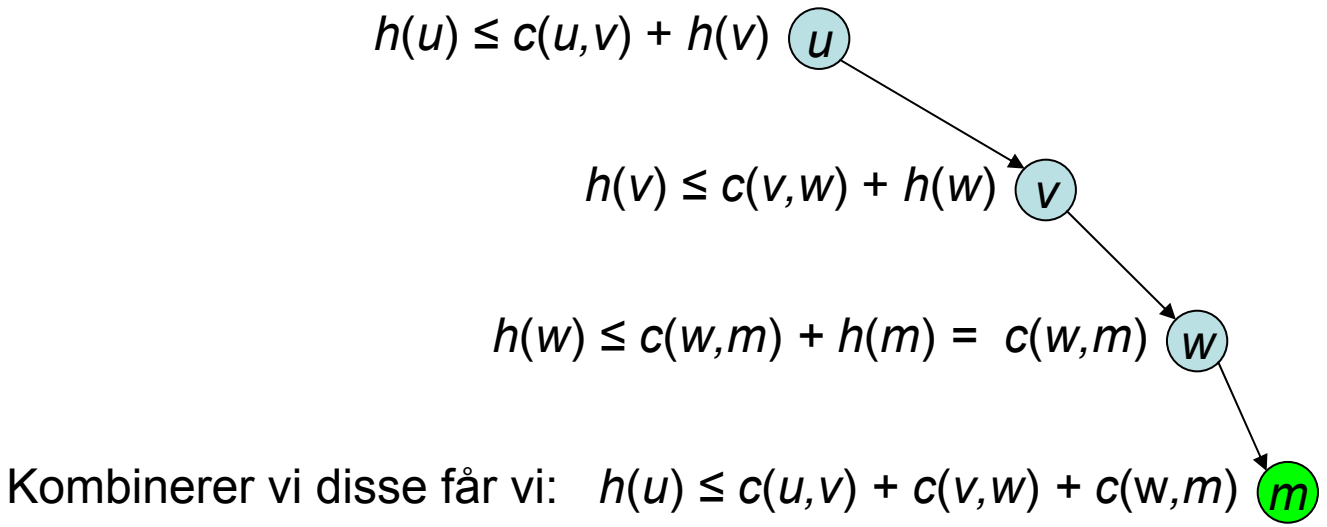
v	*r*	*a*	*b*	*c*	*d*
h(*v*)	-	23	20	15	29

A*-søk – heuristikk

- For å unngå stadig oppdateringer av treet, legger vi et ekstra «monotonitets-krav» på *h:*
  - Om det er kant fra *v* til *w* med vekt *c*(*v,w*), så skal gjelde: $h(v) \leq c(v,w) + h(w)$.
  - Alle mål-noder *m* har $h(m) = 0$.

- Det fine er at dette kravet medfører det første kravet (understimatskravet), så vi slipper å tenke på det.

  Bevis: Vi antar at $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow m$ er korteste vei fra *v* til måltilstanden *m*:



Kombinerer vi disse får vi: $h(u) \leq c(u,v) + c(v,w) + c(w,m)$

A*-søk – algoritmen

- Vi har en rettet graf G med kantvekter $c(u,v)$, en startnode og et antall mål-noder, samt en monoton heuristikk-funksjon h.

- Hver node v har i tillegg følgende variable:
  - $g(v)$ som stadig vil forandre seg under algoritmen, men som til slutt får lengden av korteste vei fra startnoden til v.
  - *parent*(v) som skal bli foreldre-peker i et tre av korteste veier fra start-noden.
  - $f(v)$ som hele tiden er lik $g(v) + h(v)$, altså et estimat av veilengden fra start til et mål gjennom v.

- Vi har en prioritets-kø PQ av noder, der $f(v)$ er nøkkel (prioriteten).
  - Denne initialiseres med bare start-noden s, med $g(s) = 0$, og $h(s)$ vilkårlig. (Dette mangler i selve prosedyre-beskrivelsen i boka, side 725.)

- De nodene som for øyeblikket ikke er i PQ deles i to typer
  - Tre-noder: Disse har en foreldre-peker i et tre med startnoden som rot (korteste vei til roten-treet). Disse har alle vært i PQ, og ved starten er det ingen slike tre-noder.
  - Usette noder (de vi ikke har kommet borti så langt)

A*-søk – algoritmen

- PQ initialiseres altså med start-noden *s*, med *g(s)* = 0 (alle andre noder er usette).

- Steget, som gjentas så lenge PQ ikke er tom eller vi treffer en mål-node:
  - Plukk den best prioriterte noden *v* fra PQ (den med minst *f*-verdi).
  - Dersom *v* er en mål-node, slutter algoritmen, og *g*(*v*) og *parent*(*v*) angir korteste vei fra startnoden og den aktuelle veien (baklengs).
  - Ta *v* ut av PQ, og la den bli en tre-node (den har sin foreldre-peker og *g*(*v*) satt riktig).
  - Se på alle naboer av *v* blant de usette noder, og for hver slik *w*:
    - Sett $g(w) = c(v,w) + g(v)$.
    - Sett $f(w) = g(w) + h(w)$.
    - Sett $parent(w) = v$.
    - Sett *w* inn i PQ .
  - Se på alle naboer av *v* i PQ, og for hver slik *w´*:
    - Hvis $g(w´) > c(v,w´) + g(v)$ så
      - sett $g(w´) = c(v,w) + g(v)$
      - sett $parent(w´) = v$
  - Vi ser altså *ikke* på de naboene til *v* som er tre-noder! (At det går bra krever et bevis som kommer på de neste foilene)

A*-søk – monoton heuristikk

- Om vi bruker $h(v) = 0$ for alle noder, så blir dette Dijkstras korteste-vei-algoritme.
- Ved å bruke heuristikken håper vi å konsentrere oss mer om de veiene som fører til et mål, slik at algoritmen går raskere.
- Men, vi tar da nodene ut av PQ i en annen rekkefølge enn i Dijkstra-algoritmen
- Dette kunne føre til at riktig veilengde ikke er kommet inn i en node v når den taes ut av PQ og over i treet (slik at vi stadig måtte gå tilbake og oppdatere *g(w)* og *parent(w)* for noder w i treet (som har forlatt PQ)

MEN heldigvis gjelder (proposition 23.3.2 i boka):

- Om h er monoton, så vil verdiene av $g(v)$ og $parent(v)$ alltid ha blitt riktige i det øyeblikk v taes ut av PQ over i treet.
- Dermed behøver vi aldri gå tilbake i treet og oppdatere noe.

Merk: Det er en viktig trykkfeil på side 724, formel 23.3.7:
Der det står: … $h(v) + h(v)$ … skal det stå … $h(v) \leq g(v) + h(v)$ …

A*-søk – monoton heuristikk

Bevis: Jeg mener vi bør bruke induksjon (ikke som i boka):

Induksjonshypotese: Setningen (Proposition 23.3.2) gjelder for alle w som er flyttet fra PQ til treet *før v*.

Steg: Vi må nå vise at den da også gjelder da også for *v*.

Vi lar generelt $g^*(u)$ være lengden av korteste vei fra start-noden til en node *u*.

Vi ser på situasjonen når *v* taes ut av PQ, og ser på nodesekvensen *P*:

start-noden = $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_j = v$

som er en korteste vei fra start-noden til *v* (med lengde $g^*(v)$)

Vi antar at $v_0, v_1, \ldots, v_k$ (men ikke v_{k+1}) er blitt tre-noder når *v* taes ut av PQ, slik at v_{k+1} er i PQ når *v* blir tatt ut av køen.

A*-søk – monoton heuristikk

Ut fra monotonisiteten vet vi at (for $i = 0, 1, \ldots, i\text{-}1$)

$$g^*(v_i) + h(v_i) \leq g^*(v_i) + c(v_i, v_{i+1}) + h(v_{i+1})$$

Siden kanten fra (v_i, v_{i+1}) er med i en korteste til v_{i+1}, gjelder

$$g^*(v_{i+1}) = c(v_i, v_{i+1}) + g^*(v_i)$$

Til sammen gir de to:

$$g^*(v_i) + h(v_i) \leq g^*(v_{i+1}) + h(v_{i+1})$$

som så, ved å la i være $k+1, k+2, \ldots, j-1$, gir

$$g^*(v_{k+1}) + h(v_{k+1}) \leq g^*(v_j) + h(v_j) = g^*(\mathrm{v}) + h(v)$$

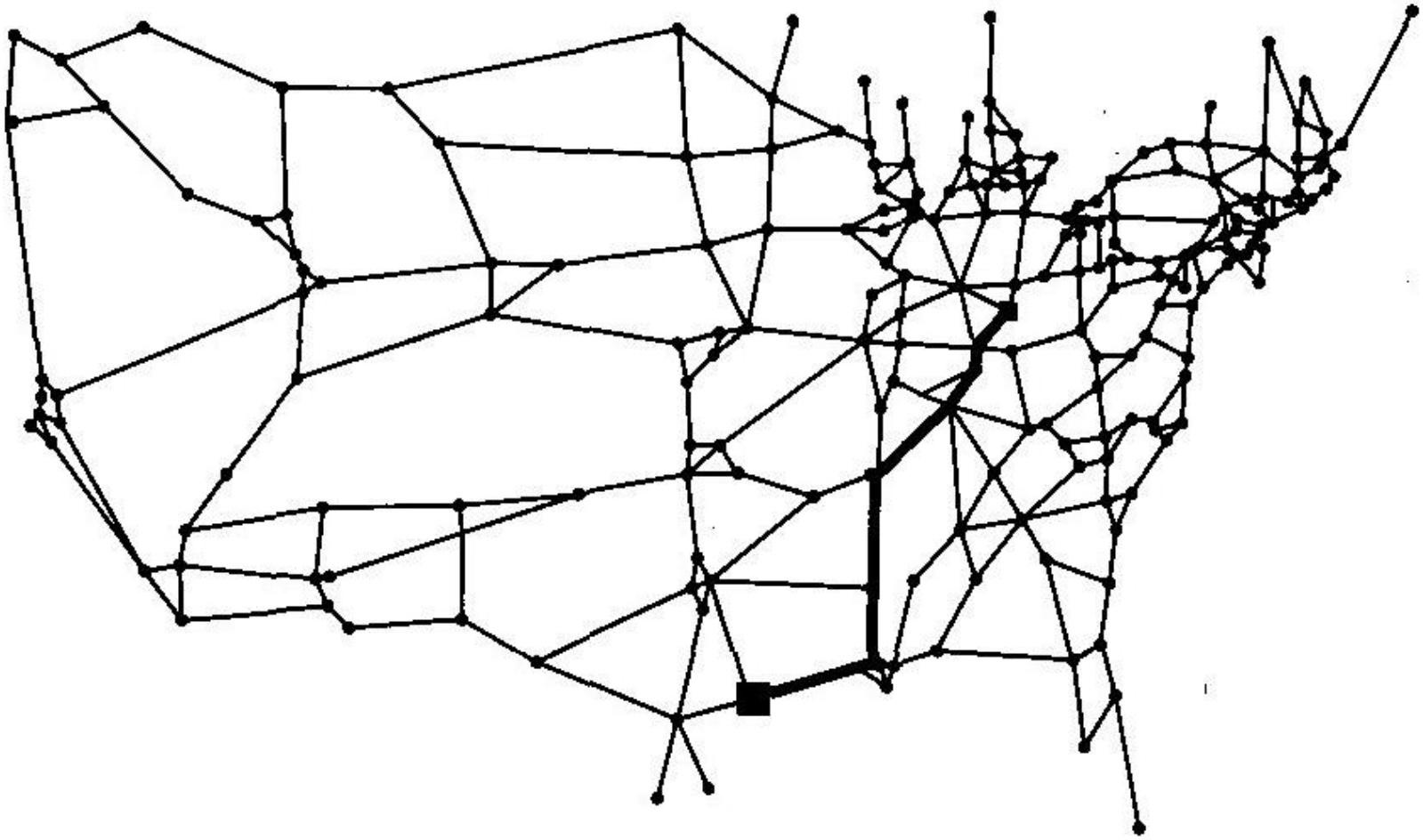
Ut fra induksjonshypotesen vet vi at $g(v_k) = g^*(v_k)$, og dermed må også (ut fra aksjonen når v_k ble tatt ut av PQ) $g(v_{k+1}) = g^*(v_{k+1})$, selv om den ligger i PQ.

Derved har vi:

$$f(v_{k+1}) = g(v_{k+1}) + h(v_{k+1}) = g^*(v_{k+1}) + h(v_{k+1}) \leq g^*(v) + h(v) \leq g(v) + h(v) = f(v)$$

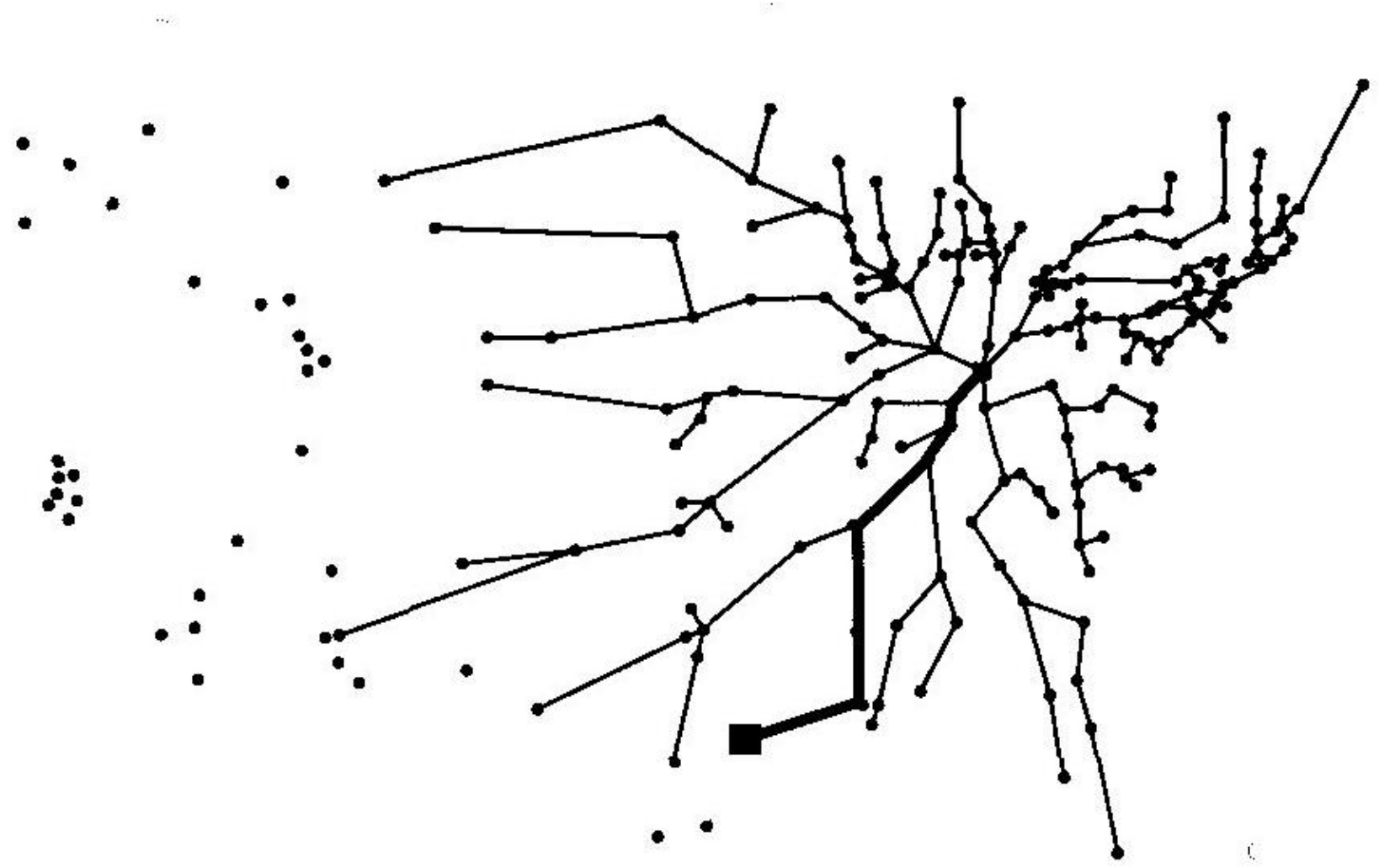
Her må imidlertid alle ≤ være likheter, ellers ville $f(v_{k+1}) < f(v)$, og da ville ikke v blitt tatt ut av køen før v_{k+1}. Derved er $g^*(v)+h(v) = g(v)+h(v)$ og altså $g^*(v) = g(v)$.

A*-søk



Amerikanske highways, korteste vei Cincinatti - Houston uthevet.

A*-søk



Treet generert av Dijkstras algoritme (stopper i Houston).

A*-søk

Treet generert av A*-søk.