UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3320/INF4320 — Metoder i grafisk databehandling og diskret ge
Eksamensdag:	7. desember 2005
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Transformasjoner

1. Anta at vi har en boundingbox om et objekt, hvor $\mathbf{b}_{\text{min}}$ er minimum av x, y og z-koordinatene, og $\mathbf{b}_{\text{max}}$ er tilsvarende maksimum. Videre har vi en rotasjonsmatrise $\mathbf{M}$ som beskriver rotasjonen av objektet om sentrum i boundingboksen.

   Sett opp en sekvens av OpenGL-kall som plasserer objektet midt på skjermen. Kameraet skal bruke en perspektivprojeksjon. Du kan anta at vinduet er kvadratisk.

   Løsning *Dette er tilsvarende oblig 2. OpenGL anvender matrisen gitt sist først på punktene. En løsning blir:*

   `glMatrixMode(GL_PROJECTION);`

   `glLoadIdentity();`

   `glFrustum(-1,1,-1,1,1,3); //` *Setter et frustum fra $z = -1$ til $z = -3$.*

   `glMatrixMode(GL_MODELVIEW);`

   `glTranslate(0, 0, -2); //` *flytter origo ned langs negativ z.*

   `scale =` $2\|\mathbf{b}_{max} - \mathbf{b}_{min}\|$`; //` *angir lengden av diagonalen.*

   `glScale(1/scale, 1/scale, 1/scale); //` *sørger for at boundingbox-en er inni enhetskulen om origo.*

   `glMultMatrix(`$\mathbf{M}$`); //` *utfører den gitte rotasjonen om senteret av bounding-boxen.*

   `glTranslate(`$-\frac{1}{2}(\mathbf{b}_{\text{min}} + \mathbf{b}_{\text{max}})$`); //` *flytter senteret av bounding-boxen til origo.*

(Fortsettes på side 2.)

2. Vi er gitt en rotasjonsmatrise $\mathbf{R}$ og en translasjonsmatrise $\mathbf{T}$. Matrisene er vanlige homogene 4×4-matriser. Kommutérer disse to matrisene generelt, altså, er $\mathbf{RT}$ det samme som $\mathbf{TR}$? Begrunn svaret.

   Løsning *Nei, det gjør de ikke. For eksempel, anta at rotasjonen er* 90 *grader om* z*-aksen og translasjonen er* $[0, 0, 1]$ *og vi er gitt punktet* $[0, 0, -1]$.

   Hvis translasjonen gjøres først, så flyttes punktet til origo og rotasjonen gjør ingenting. Resultatet blir da origo.

   Hvis rotasjonen gjøres først, så roteres punktet slik at det får posisjonen $(0, -1, 0)$. *Så translateres det til* $(0, -1, 1)$. *Altså, de to forskjellige rekkefølgene gir forskjellige svar.*

Oppgave 2 Lyssetting

Anta at vi har en punktlyskilde i punktet $\mathbf{l}$ og vi skal lyssette punktet $\mathbf{p}$ med flatenormalen $\mathbf{n}$. Øyepunktet ligger i punktet $\mathbf{e}$. Anta at farven på lyskilden, flaten og reflektert lys er hvit. Anvend Phongs lysmodell for å finne lysintensiteten for punktet $\mathbf{p}$.

Løsning *Først finner vi retningen fra punktet til lyset* $\mathbf{i} = \mathbf{l} - \mathbf{p}$. *Vi reflekterer denne retningen om flatenormalen* $\mathbf{r} = 2(\mathbf{i} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{i}$. *Vi finner også view-direction vektoren* $\mathbf{v} = \mathbf{e} - \mathbf{p}$.

Vi lar i_s, i_d *og* i_a *være spekulær, diffus og ambient intensitet for lyskilden. Ambient bidrag er simpelthen* $w_a = i_a$. *Diffust bidrag regner vi ut med Lamberts lov,* $w_d = i_d \max(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}, 0)$.

Det er to måter å regne ut det spekulære bidraget på som ikke gir nøyaktig det samme resultatet. Vi kan bruke den reflektere vektoren $\mathbf{r}$, *og da blir det spekulære bidraget* $w_s = i_s \max(\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}, 0)^{shi}$ *hvor shi er en shininess-parameter. Alternativt kan man bruke halvvektor-metoden hvor vi definerer* $\mathbf{h} = (\mathbf{l} + \mathbf{v})/\|\mathbf{l} + \mathbf{v}\|$. *Det spekulære bidraget blir i dette tilfellet* $w_s = i_s(\mathbf{h} \cdot \mathbf{v})^{shi}$.

Resultatet blir da $w = w_a + w_d + w_s$.

Oppgave 3 Bézierkurver

Gitt en kubisk Bézierkurve med kontrollpunkter

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

1. Finn punktet på kurven med parameterverdi $t = \frac{1}{4}$ ved *rekursjon på basisfunksjonene*.

   Løsning

$$\begin{gathered} B_0^0 = 1; \\ B_0^1 = \tfrac{3}{4}, \quad B_1^1 = \tfrac{1}{4} \\ B_0^2 = \tfrac{9}{16}, \quad B_1^2 = \tfrac{6}{16}, \quad B_2^2 = \tfrac{1}{16} \\ B_0^3 = \tfrac{27}{64}, \quad B_1^3 = \tfrac{27}{64}, \quad B_2^3 = \tfrac{9}{64}, \quad B_3^3 = \tfrac{1}{64}. \end{gathered}$$

(Fortsettes på side 3.)

som gir

$$\mathbf{p}(\tfrac{1}{4}) = \sum_{i=0}^{3} B_i^3 \mathbf{p}_i = \frac{27}{64}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} + \frac{27}{64}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + \frac{9}{64}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{64}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{-11}{16}\\\frac{1}{8}\end{bmatrix}.$$

2. Vi skal omskrive den kubiske Bézierkurven til to kubiske Bézierkurver, hvor den opprinnelige kurven er splittet ved parameterverdien $= \frac{1}{2}$. Finn kontrollpunktene til de to kurvene.

   Løsning *Vi gjør deCasteljau med $t = \frac{1}{2}$ og får*

$$\mathbf{p}_0^1 = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1^1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2^1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$
$$\mathbf{p}_0^2 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1^2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$
$$\mathbf{p}_0^3 = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

   og plukker ut kontrolpunktene. Første segment har kontrolpunkter

$$\mathbf{p}_0^0 = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^1 = \begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^2 = \begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_0^3 = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

   og det andre segmentet har kontrolpunktene

$$\mathbf{p}_0^3 = \begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \mathbf{p}_1^2 = \begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2^1 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \mathbf{p}_3^0 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

Oppgave 4 Barysentriske koordinater

Vi skal jobbe med trekanten $T \in \mathbb{R}^2$,

$$T = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3], \qquad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}.$$

1. Gitt punktet $\mathbf{p} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$, hva er de barysentriske koordinatene til dette punktet?

2. For hvert av de tre hjørnepunktene $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ og $\mathbf{p}_3$ har vi gitt en RGB-farveverdi,

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_3 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

   Bruk lineærinterpolasjon for å finne RGB-farveverdien for punktet $\mathbf{p}$.

(Fortsettes på side 4.)

Løsning *Vi lar* $u = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ *og* $v = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ *og finner arealet ved* $u_x v_y - u_y v_x$*, og tilsvarende for de andre arealene. Så, de barysentriske koordinatene til* $\mathbf{p}$ *er gitt ved*

$$\begin{aligned}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \left(\frac{\mathrm{area}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}{\mathrm{area}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}, \frac{\mathrm{area}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}, \mathbf{p}_3)}{\mathrm{area}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)}, \frac{\mathrm{area}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p})}{\mathrm{area}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)} \right) \\ &= \left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}, \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}}, \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{2}} \right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right).\end{aligned}$$

Vi kan lett verifisere at vi har riktig løsning med å sette inn og se om vi får korrekt resultat,

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

Videre har vi at

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ \frac{2}{3}\\ 0\end{bmatrix},$$

som er en litt dyp gulfarve.

Oppgave 5 Subdivisjonsflater

Vi skal se på subdivisjon med $\sqrt{3}$-skjemaet på et trekantmesh. Som en hjelp er

$$\beta = \frac{4 - 2\cos(2\pi/n)}{9n}.$$

Fortell om hvordan geometrien splittes og hvilke regler som benyttes. Hva skal man gjøre langs randen hvis meshet er åpent?

Løsning *Det er presentert to måter å utføre dette skjemaet på. Felles for begge er reglene for plasseringen av punktene.*

Regelen for midtpunkter av trekanter er

$$\mathbf{p}^{k+1} = \tfrac{1}{3}\left(\mathbf{p}_a^k + \mathbf{p}_b^k + \mathbf{p}_c^k\right),$$

hvor $\mathbf{p}_a^k$*,* $\mathbf{p}_b^k$ *og* $\mathbf{p}_c^k$ *er hjørnepunktene til trekanten. Regelen for noder tilsvarende gamle noder er*

$$\mathbf{p}^{k+1} = (1 - n\beta)\mathbf{p}^k + \beta \sum_{i=1}^{n} \mathbf{p}_i^k,$$

hvor $\mathbf{p}_i^k$ *er de* n *direkte naboene til* $\mathbf{p}^k$*.*

Strategier for forfining:

1. *For å forfine så introduseres et midtpunkt for alle trekantene og alle gamle noder får en ny posisjon. Hver trekant blir splittet i tre, hvor de tre trekantene har trekantmidpunktet som toppunkt. Så swappes alle kanter som var kanter i det gamle meshet, altså alle som ikke forbinder trekantmidpunkter.*

(Fortsettes på side 5.)

2. *Vi generérer alle punktene som nevnt ovenfor. Vi ser at efter swappingen så blir hver kant splittet i to trekanter som står på tvers av kanten. Vi generérer disse trekantene direkte.*

En vanlig teknikk for å håndtere render er å la kanten være en kubisk splinekurve. Posisjonen til en node tilsvarende en gammel node blir $\frac{3}{4}$ *av posisjonen til den gamle noden og* $\frac{1}{8}$ *av de to naboene til noden langs kanten. Resten av naboene blir ikke brukt. Hver kant får også et midpunkt, som er simpelthen gjennomsnittet av de to endepunktene på kanten. Render er lettest å håndtere i strategi (2), hvor vi, langs en randkant, splitter i to, men bruker midtpunktet til kanten istedenfor midtpunktet til trekanten som ikke er der.*