

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MOD 219 — Metoder i grafisk databehandling
og diskret geometri

Eksamensdag: 27. november 2002

Tid for eksamen: 9.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Koordinater og transformasjoner

Et punkt (x, y) i planet kan representeres i polarkoordinater som

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi.$$

1a

Hva er den nye posisjonen (x', y') til (x, y) etter en rotasjon rundt origo med en vinkel θ ? Bruk vektor- og matrisenotasjon til å uttrykke svaret.

Løsning.

$$x' = \rho \cos(\phi + \theta) = \rho(\cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta),$$

$$y' = \rho \sin(\phi + \theta) = \rho(\sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta).$$

I matrisenotasjon,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

1b

Bruk din løsning til å finne den 4×4 rotasjonsmatrisen som representerer rotasjon i \mathbb{R}^3 rundt y -aksen med en vinkel θ .

Løsning. Med hensyn til homogene koordinater,

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Fortegn forklares av at en positiv vinkel går fra z -aksen til x -aksen (høyrehåndsregelen).

(Fortsettes på side 2.)

1c

Skriv en OpenGL sekvens som setter model-view matrisen til å representere en rotasjon i \mathbb{R}^3 rundt aksen som går gjennom de to punktene $(1, 1, 4)$ og $(3, 4, 7)$.

Løsning. Aksen er gitt ved punktet $(1, 1, 4)$ (eller $(3, 4, 7)$) og vektoren $(2, 3, 3) = (3, 4, 7) - (1, 1, 4)$. Sekvensen er

```
glMatrixMode(GL_MODELVIEW);
glLoadIdentity();
glTranslatef(1.0, 1.0, 4.0);
glRotatef(theta, 2.0, 3.0, 3.0);
glTranslatef(-1.0, -1.0, -4.0);
```

hvor θ er vinklen.

Oppgave 2 Skyggelegging

Anta at vi ønsker å skyggelegge et stort trekant-mesh. En enkel datastruktur for trekant-mesh er en Indexed Face Set, hvor hver trekant representeres ved tre indekser til punkter i rommet, slik at hvert punkt er representert en gang.

2a

Forklar hvorfor, med denne datastrukturen, Gouraud shading krever $O(N^2)$ operasjoner, hvor N er antall noder i meshet.

Løsning. Gouraud-skyggelegging krever en estimat av flatenormalen i hver node v , vanligvis gitt ved

$$n = \left(\sum_{i=1}^k n_k \right) / \left| \sum_{i=1}^k n_k \right|,$$

hvor n_1, \dots, n_k er normalene til trekantene som inneholder v . Dette krever at for hver node v , må vi finne alle trekantene som den hører til. Med en 'Indexed Face Set' er vi nødt til å løpe gjennom alle trekantene i meshet for å finne hvilke av de inneholder v . Dette krever $O(N)$ operasjoner fordi antall trekanter er $O(N)$. Dette må gjøres for alle noder, og dermed koster det hele $O(N^2)$.

2b

Beskriv en alternativ datastruktur som krever mer plass, men gjør at Gouraud shading tar bare $O(N)$ operasjoner.

Løsning. Vi trenger en data-struktur med mer nabo-informasjon. Det finnes forskjellige muligheter. En mulighet er at (1) hver trekant har pekere til de tre nabo-trekantene (pekeren kan være null hvis nabo-trekanten ikke finnes,

(Fortsettes på side 3.)

d.v.s. at kanten ligger på randen), og (2) hver node har en peker til en vilkårlig trekant som inneholder den.

Gitt en node, kan vi nå få tak i en av sine trekantene og så finne alle sine trekantene ved å bruke trekant-trekant pekere. Dette vil koste bare $O(1)$ operasjoner under den rimelige antagelsen at antall trekanter rundt en node er $O(1)$. Dermed koster den hele skyggeleggingen $O(N)$.

En annen mulig data-struktur har en array av node-node pekerer for hver node, som spesifiserer nabo-nodene.

Oppgave 3 Bezier-kurver

Betrakt den kubiske Bezier-kurven

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 B_{i,3}(t)P_i, \quad t \in [0, 1],$$

hvor

$$B_{i,3}(t) = \binom{3}{i} t^i (1-t)^{3-i}$$

er det i -te Bernstein-Bezier polynomet av grad 3.

3a

Utled et uttrykk for den førstederiverte til $B_{i,3}(t)$ ved hjelp av Bernstein-Bezier polynomer av grad 2, og bruk resultatet til å finne et uttrykk for den førstederiverte $P'(t)$ som en kvadratisk Bezier-kurve av grad 2.

Løsning.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} B_{i,3}(t) &= \frac{3!}{i!(3-i)!} (i t^{i-1} (1-t)^{3-i} - (3-i) t^i (1-t)^{2-i}) \\ &= 3 \left(\frac{2!}{(i-1)!(3-i)!} t^{i-1} (1-t)^{3-i} - \frac{2!}{i!(2-i)!} t^i (1-t)^{2-i} \right) \\ &= 3(B_{i-1,2}(t) - B_{i,2}(t)). \end{aligned}$$

$$P'(t) = \sum_{i=0}^3 B'_{i,3}(t)P_i = 3 \sum_{i=0}^3 (B_{i-1,2}(t) - B_{i,2}(t))P_i = 3 \sum_{i=0}^2 B_{i,2}(t)(P_{i+1} - P_i).$$

3b

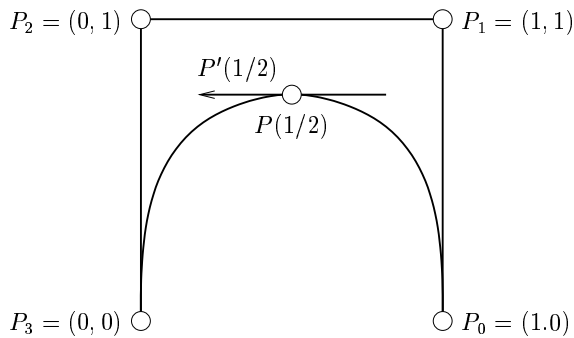
Hvis kontrollpunktene er $P_0 = (1, 0)$, $P_1 = (1, 1)$, $P_2 = (0, 1)$, $P_3 = (0, 0)$, skisser kurven $P(t)$ og indiker både $P(1/2)$ og $P'(1/2)$ på kurven.

Løsning.

$$P(1/2) = \frac{1}{8}P_0 + \frac{3}{8}P_1 + \frac{3}{8}P_2 + \frac{1}{8}P_3 = (1/2, 3/4).$$

$$P'(1/2) = \frac{1}{4}(P_1 - P_0) + \frac{1}{2}(P_2 - P_1) + \frac{1}{4}(P_3 - P_2) = (-1/2, 0).$$

(Fortsettes på side 4.)



Oppgave 4 Trekant-mesh

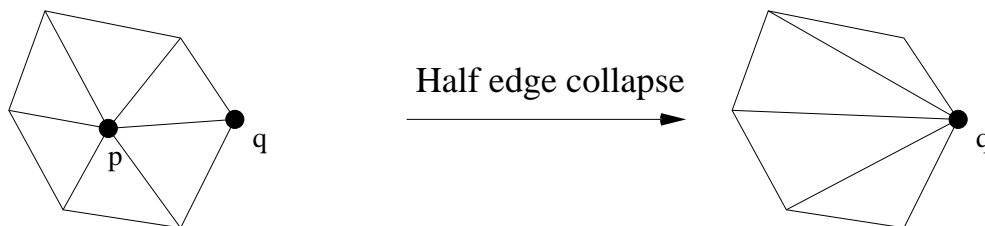
Anta at et sammenhengende trekant-mesh M har v noder, e kanter, og f trekanter. Hva er Euler-karakteristikken χ til M ?

Hvilken endring i v , e , og f blir det etter en 'half-edge' kollapse? Hvorfor er dette en Euler-operasjon? Begrunn svaret.

Løsning. Euler-karakteristikken er

$$\chi = v - e + f.$$

En 'half-edge' kollapse betyr at en node p er fjernet og en nabo q er koblet til alle de andre naboene (bortsett fra de to som er koblet).



Hvis v' , e' , f' are de endrede antall noder, kanter, og trekanter, har vi da

$$v' = v - 1, \quad e' = e - 3, \quad f' = f - 2.$$

En Euler-operasjon er en operasjon som ikke endrer Euler-karakteristikken. Siden den nye karakteristikk er

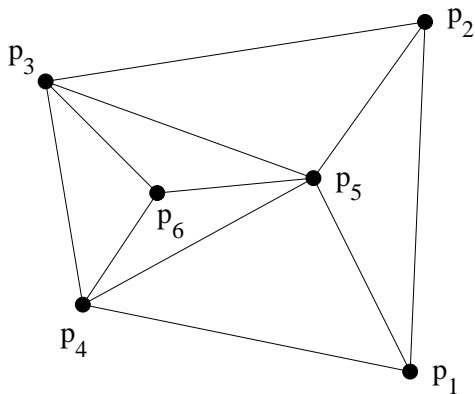
$$\chi' = v' - e' + f' = (v - 1) - (e - 3) + (f - 2) = \chi,$$

ser vi at en half-edge kollapse er en Euler-operasjon.

Oppgave 5 Parametrisering

Anta at M er trekant-meshet i rommet i Figur 1, med nodene $p_1, \dots, p_6 \in \mathbb{R}^3$.

(Fortsettes på side 5.)



Figur 1: Parametrisering

5a

La $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en stykkevis lineær avbildning. Med $v_i = \psi(p_i)$ er avbildningen ved randen gitt ved

$$v_1 = (1, 0), \quad v_2 = (1, 1), \quad v_3 = (0, 1), \quad v_4 = (0, 0). \quad (1)$$

Avbildningen av de indre nodene er gitt ved å kreve at hvert av de to punktene v_5 og v_6 skal være barysentret (sentroiden) til nabopunktene. Sett opp ligningssystemet, løs det, og tegn opp det avbildede trekant-meshet.

Løsning. Ligningssystemet er

$$\begin{aligned} v_5 &= \frac{1}{5}(v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_6), \\ v_6 &= \frac{1}{3}(v_3 + v_4 + v_5). \end{aligned}$$

Det betyr at

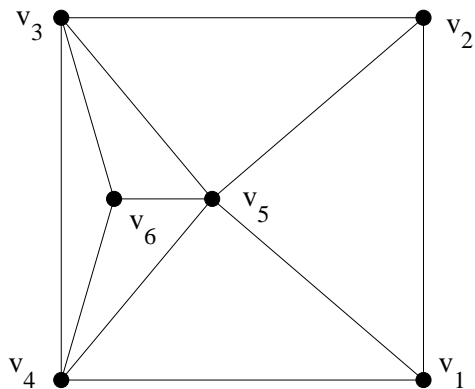
$$\begin{aligned} 5v_5 - v_6 &= (2, 2) \\ 3v_6 - v_5 &= (0, 1). \end{aligned}$$

Løsningen er

$$v_5 = (3/7, 1/2), \quad v_6 = (1/7, 1/2).$$

Se Figur 2.

(Fortsettes på side 6.)



Figur 2: Avbildet triangulering

5b

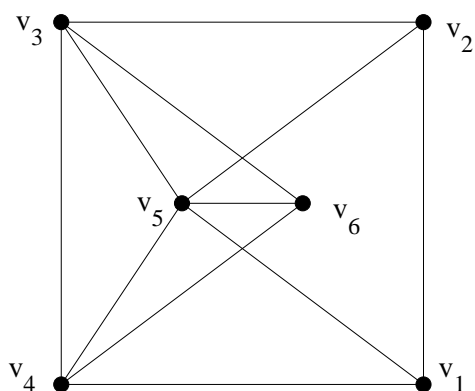
Finnes det en konveksskombinasjonsavbildning $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^2$ slik at de fire randpunktene er som i ligning (1), men slik at $v_5 = (1/3, 1/2)$ og $v_6 = (2/3, 1/2)$?

Løsning. Nei, det finnes ikke. Figur 3 viser avbildningen hvis $v_5 = (1/3, 1/2)$ og $v_6 = (2/3, 1/2)$. Siden v_6 ikke ligger i den konvekse innhylningen til sine naboene v_3, v_4, v_5 , er det umulig å uttrykke v_6 som en konveksskombinasjon av disse tre punkt, d.v.s. vi kan ikke finne $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 > 0$ med

$$\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 1,$$

slik at

$$v_6 = \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 + \lambda_5 v_5.$$



Figur 3: Ugyldig triangulering

Eller Det er et teorem som sier at så lenge randen til en konveksskombinasjonsavbildning ψ er konveks (for eksempel et rektangel), må ψ være en-til-en. Men fra Figur 3 er ψ opplagt ikke en-til-en.